Årg. 37:2 Juni 1954

ELEMENTA

Tidskrift för matematik, fysik och kemi

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16IV STOCKHOLM

ANDRA HÄFTET

BENGT G. RÅNBY, Den makromolekylära kemiens utveckling. Nobelpriset i kemi 1953 77
HANS v. UBISCH, Naturligt tritium, en ny isotop för åldersbestämning 85
B. HALLERT, Fotogrammetri II 89
BJÖRN SVENONIUS, Trianglar med heltalssidor och given cos (B—A) 102
ÅKE WALLENQUIST, Fotografiska solförmörkelseobservationer med mindre instrument 107
ARNE ELFVING, Schema för problem gällande inköps- och försäljningspris 112
EVE STAFFANSSON, Ny giv för fysikaliska demonstrationer 113
Notiser: GÖSTA WRANGLÉN, Tredjegradsekvationen på gymnasiet; V. HUGO SANNER, Våglängdsbestämning utan spektrometer; ARNE ELFVING, Astronomiska bilder tillverkade av lysfärg; JOSEF ANDERSSON, Uppg. 1 i studentexamen, specialkurs, mars 1954; HELGE ALMGREN, Uppg. 3 i studentexamen, specialkurs 1954; C. E. BLOM, En fysikalisk studentuppgift från 1944. Ett beriktigande; NILS JURINGIUS, Uppg. 6 i studentexamen, specialkurs, jan. 1953 116
Aktuellt: Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning, vårsammanträde i april 1954 (BIRGER ADELL); Den totala solförmörkelsen den 30 juni 1954; Sommarkurs i fysiologi och farmakologi 121
Bokanmälningar: HYLTÉN-CAVALLIUS-SANDGREN, Plan geometri; WYLIE, Calculus; SPAIN, Tensor Calculus; HÖRMANDER-SANDGREN, Matematisk problemsamling för två betyg; BRAITHWAITE, Scientific Explanation; HANSEN-HURWITZ-MADOW, Sample Survey Methods and Theory; COCHRAN, Sampling Techniques; BATCHELOR, The Theory of Homogeneous Turbulence; DE BROGLIE, Éléments de théorie des quanta et de mécanique ondulatoire; Reports on Progress in Physics Vol. XVI; KLEMPERER, Electron Optics; AUDRIETH-KLEINBERG, Non-aqueous Solvents as Media for Chemical Reactions; MITTASCH, Salpetersäure aus Ammoniak; PASCAL, Notions élémentaires de chimie générale à lumière des théories modernes; KETELAAR, Chemical Constitution 123
Problemavdelning:
Matematiska problem (red. av S. BÅGMAN) 134
Matematiska och fysikaliska uppg. i studentexamen mars 1954 137
Realexamen v.t. 1954: Provräkning 142
Praktisk realexamen v.t. 1954: Uppg. i fysik, Uppg. i kemi med laborationsteknik, Uppg. i beskrivande maskin- och byggnadslära 144
Insänd litteratur och Tidskrifter å annonsblad intill s. 132 o. 133.
Annonsörer: Almqvist & Wiksell; Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning; Rudolph Grave; Hermods; Norstedt & Söner (två annonssidor); AB Philips; Svenska Bokförlaget; Svenska Fysikersamfundet; Teknisk Tidskrift.

Pris pr år kr. 12:50 pr häfte kr. 3:50

ELEMENTA

Årligen fyra häften (mars, juni, sept., dec.). Prenumeration sker genom inbetalning å postgiro 527 55; pr år kr. 12:50, pr häfte kr. 3:50. Tidskriften sändes som utgivarkorsband.

Tidigare årg. Vänd Eder direkt till red. med en förfrågan. Av årg. 1—13 är flera ofullständiga. Priset pr årg. (i häften) är för årg. 14 (1931) t.o.m. 34 (1951) kr. 10:— för 35 (1952) och 36 (1953) kr. 12:50.

Pärmar av grön klot à 3:— + 20 öre i porto; varje pärm är avsedd för två årg.: 1—2, 3—4, t. o. m. 35—36.

Problemhäften för åren 1943—52 à kr. 1:20, för 1953 à kr. 1:40. Innehåll: Student- o. realex.uppg. i matem. o. fysik med svar och anvisningar.

Red.-kommitté: professor G. Borelius, adjunkt S. Bågman, byrådirektör S. Comét, lektor Torsten Jönsson, lektor G. Starck, professor J. Tandberg och lektor A. Wahlgren. Redaktör och utgivare: C. E. Blom. Red. o. exp. Karlbergsv. 16, Stockholm.

Särtryck ur ELEMENTA:

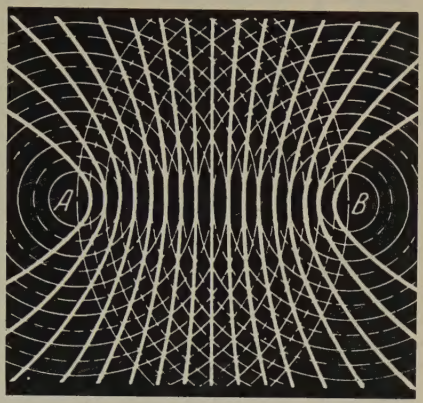
1. A. Nordhult, De viktigaste konstruktions- och driftsegenskaperna hos likströmsmaskinerna, kr. 2:—.
2. M. Sjöström, Vätskors och gasers strömning, kr. 2:—.
3. M. Sundqvist, Teorien för de moderna glasögonen, kr. 2:—.
4. J. Tandberg, Om vinkelns tredelning. Slut.
5. G. Ljunggren, Gasskyddets kemi kr. 1:—.
6. S. Comét, Matrisräkning, kr. 2:—
7. H. Henrikson, Om segelflygning och dess energikällor i atmosfären, kr. 2:40.
8. K.-B. Augustinsson, Vitaminernas kemi, kr. 2:—.
9. L. G. Sillén, Kemiska reaktionsformler, kr. 2:—.
10. L. G. Sillén, Kemistens hjärna - ett utrymmesproblem, kr. 2:—.
11. C.-E. Fröberg—G. Kjellberg—O. Boivie, Siffermaskiner och hålkortsmaskiner, kr. 3:—.
12. Karin Aurivillius, Analysvågen, kr. 2:40.
13. Uno Trägårdh, Primär- och sekundärelement, kr. 2:40.
14. K.-B. Augustinsson, Enzymkemi, kr. 2:60.

Försumma ej att komplettera Edra Elementa-årg. Några övertaliga serier omfattande årg. 21—30 (1938—1947) i häften, direkt från exp. à 75 kr. + porto.

En komplett Elementa-serie omfattande årg. 1—34 (1917—1951), bundna i 17 förlagsband, säljes genom Elementas exp. Pris 450 kr. + frakt.

Författare i detta häfte: lektor B. Adell, Lund; läroverksadjunkt H. Almgren, Ludvika; docent B. Andersson, Stockholm; fil. dr J. Andersson, Vaxholm; fil. mag. G. Björck, Stockholm; fil. lic. G. Blom, Malmö; läroverksadjunkt A. Elfving, Stockholm; lektor B. Englund, Uppsala; professor B. Hallert, Stockholm; fil. dr N. Juringius, Stockholm; lektor T. Jönsson, Stockholm; rektor E. Lunell, Skellefteå; fil. lic. P. O. Olsson, Stockholm; fil. mag. H. Riesel, Stockholm; docent B. Rånby, Uppsala; lektor H. V. Sanner, Uppsala; professor K. Siegbahn, Stockholm; professor L. G. Sillén, Stockholm; lektor E. Staffansson, Göteborg; lektor B. Svenonius, Borås; dr techn. H. v. Ubisch, Stockholm; assistent E. Uggla, Stockholm; observator Å. Wallenquist, Uppsala; lektor G. Wranglén, Falköping.

NY upplaga



FYSIKUPPGIFTER

i studentexamen

ordnade med hänsyn till innehåll och svårighetsgrad av
MARTIN SJÖSTRÖM

Varje avdelning inledes med typexempel och därefter stegras svårigheten i exemplen gradvis. Vissa avsnitt av kursen, exempelvis Ohms lag II och Kirchhoffs lagar, ljusets brytning i tunna linser m. fl. där typvariationen är rikare och behovet av övning större, har fått flera exempel.

"En bok av denna art fyller ett djupt känt behov och har därför sedan någon tid faktiskt varit förväntad och åstundad."

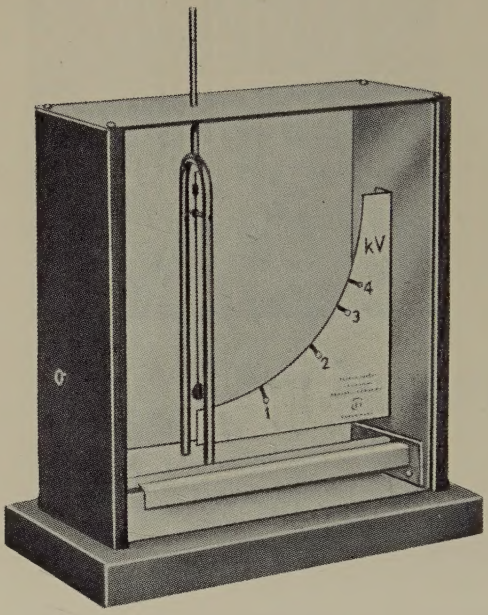
Ur utlåtande till Statens Läroboksnämnd

Pris 5:10 G

Utkommer i maj

ALMQVIST & WIKSELL
Box 159, Stockholm 1, Postgiro 758

STATISK VOLTMETER



Ett nytt, stabilt instrument med mätområde 0—4 kV.

Materialet är ädelträ, plast och glas.

Vi leverera de apparater som behövs för undervisningen i

Optik
optiska bänkar, prismor m. m.

Akustik
vågrörelseapparater, stämgafflar m. m.

Mekanik
Atwoods fallmaskin, lutande plan m. m.

Värmelära
exempelvis termostaplar

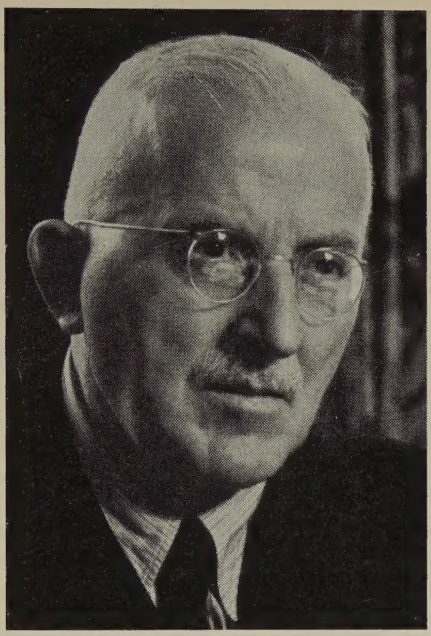
El. lära
bandgeneratorer, motorgeneratorer m. m.

Dessutom föra vi mätinstrument av alla slag.

RUDOLPH GRAVE AB

Malmskillnadsg. 48 C Stockholm 3
Box 3082 Tel. 23 37 80

Malmgatan 10 Malmö 6
Box 6058 Tel. 381 25



Hermann Staudinger

Den makromolekylära kemiens utveckling

av docent Bengt G. Rånby, Fysikalisk-Kemiska Institutionen,
Uppsala Universitet

1953 års Nobelpris i kemi tilldelades den tyske kemisten HERMANN STAUDINGER för »hans upptäckter inom de högmolekylära ämnenas kemi».

De vetenskapliga arbeten, som därmed prisbelönats, påbörjades för ca 35 år sedan, och de viktigaste resultaten hade framlagts redan vid 1930-talets början. Staudinger har dock oförtrutet arbetat vidare, och vad som nu belönats är ett vetenskapligt livsverk av ett oerhört omfång — ett verk, som i huvudsak är baserat på en enda idé: existensen av makromolekyler av kolloidala dimensioner. För att få det riktiga perspektivet på Staudingers insatser kan vi kasta en blick på den makromolekylära kemiens utveckling under den tid Staudinger gjorde sina viktigaste arbeten.

Högpolymerkemien fram till år 1920

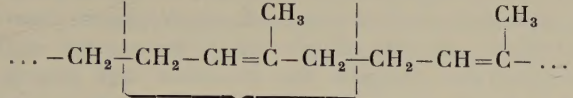
Vid 1900-talets början hade de organiska kemisterna kunnat bestämma molekylstrukturen för ett mycket stort antal enkla ämnen med upp till ett par tiotal atomer. Där ingick kolväten, alkoholer, fettsyror, aminosyror och enkla sockerarter. Detta innebar en stor triumf för den organisk-kemiska strukturläran sådan den utvecklats av Kekulé, Le Bel, van't Hoff, Emil Fischer m. fl. under 1800-talets sista decennier. Om man slår upp »Chemisches Central-Blatt» för år 1900, så finner man t. ex. att strukturen för aminosyran lysin (α, ε-diaminokapronsyra) blivit bestämd under året, att sockerarterna arabinos, xylos och fukos isolerats efter hydrolys av s. k. Tragantgummi (växtsaft från vissa *Astragalus*-buskar) och att kolhydrater innehållande mannos och galaktos resp. lävulos och mannos extraherats ur växtmaterial. Utöver de ingående monosackariderna var vid den tiden knappast någonting känt om de sammansatta kolhydraternas struktur. Även syntetiska polymerisationsprodukter t. ex. av diazoättikester (di- och trimerer) hade undersökts och t. o. m. strukturbestämts. Av årgången för 1920 av »Zentralblatt» framgår, att intresset för stora molekyler hade ökat. Naturgummi och olika hartser analyserades, både det syntetiska fenol-formalin-hartset bakelit, som var känt sedan 1910-talet, och naturens cumaron-, guajakol- och kolofoniumhartser. Även kolhydrater som stärkelse och cellulosa undersöktes med stor iver men utan större framgång.

Dessa ämnens allmänna egenskaper tydde på att de var kolloidala och alltså innehöll mycket stora partiklar eller molekyler. Partiklarnas verkliga storlek var dock inte direkt mätbar med dåtida metoder. Flertalet forskare ansåg, att det var fråga om aggregat av mindre molekyler sammanhållna av svagare krafter av något slag, s. k. restaffiniteter el. dyl. Som exempel kan nämnas cellulosa, som enligt K. Hess år 1920 antogs innehålla aggregerade hexaglukosmolekyler (»tetraglukosidylcellobios»), och naturgummi (kautschuk), som enligt C. Harries år 1919 tillskrevs en analog uppbyggnad av ringslutna isoprenmolekyler (ursprungligen antogs två isoprenenheter ingå i varje ring, senare något flera). En sådan uppfattning var väl förenlig med dåtidens torftiga experimentella data. Aggregationsteorien ansågs förklara bl. a. de organiska kolloidernas svällning vid upplösning och lösningarnas höga viskositet och dennas beroende av temperaturändringar och elektrolyttillsatser.

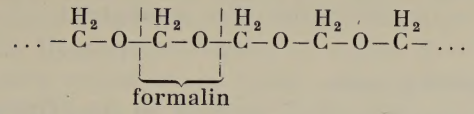
Staudingers makromolekylteori

Hermann Staudinger gav sig i kast med de stora molekylernas kemi år 1920 med en uppsats »Über Polymerisation» i Ber. dtsch. chem.

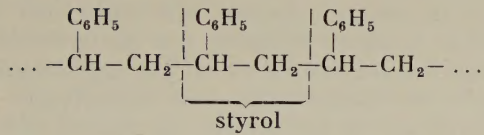
Ges. Där diskuterar han dels bildning av dimerer och olika ringformiga molekyler men också högmolekylära polymerisationsprodukter av isopren (kautschuk), av formalin (paraformaldehyd) och av styrol (metastyrol, senare kallad polystyrol). Staudinger hade ingen förståelse för aggregationsteorien utan hävdade, att det i samtliga fall vore fråga om stora molekyler alltigenom sammanhållna av vanliga kemiska bindningar. Varje kolloidpartikel skulle således utgöras av en enda stor molekyl. För de nämnda tre substanserna föreslog Staudinger följande strukturformler, vilka visat sig vara i princip riktiga.



isopren



formalin



styrol

Han hade en klar uppfattning om polymerisationens förlopp såsom en förflyttning eller ett försvinnande av dubbelbindningar. Denna tanke var inte ny. Kautschukformeln hade uppställts redan år 1910 av den engelske kemisten C. C. Pickles som ett alternativ till mångledade ringar av Harries' typ.

Staudinger ansåg alltså, att den organiska kemiens strukturlära var direkt tillämplig även på högmolekylära polymerisationsprodukter. Han kallade substanserna organiska kolloider — beteckningen makromolekyl infördes år 1924 — och ansåg, att de innehöllo kedjor av mycket stor men varierande längd. Staudinger, som tidigare varit helt inriktad på klassisk organisk kemi, var emellertid vid denna tid skeptisk beträffande möjligheterna att med fysikaliska metoder bestämma kolloidpartiklarnas storlek. Han skriver år 1920:

> »Bei allen diesen Kolloiden kann man natürlich kein Molekulargewicht angeben, und es hat auch keinen Sinn, mit solchen Substanzen Molekulargewichtsbestimmungen vorzunehmen».

Staudinger insåg, att de fryspunktsnedsättningar och kokpunktsförhöjningar, som erhölls experimentellt för polymerlösningar, orsakades av kvarvarande monomer eller andra lågmolekylära föroreningar.

För att bevisa kolloidpartiklarnas existens som verkliga molekyler i organisk-kemisk mening genomförde Staudinger kemiska omsättningar. Kautschuk hydrerades vid högt tryck och hög temperatur till en hydrokautschuk utan dubbelbindningar, som fortfarande hade kolloida egenskaper. Den processen hade tidigare prövats av Harries men då gett en starkt nedbrutan och ofullständigt hydrerad produkt. Kemiska reaktioner, s. k. polymeranaloga omsättningar, genomfördes med en rad andra högpolymerer, t. ex. förtvålning av polyvinylacetat till polyvinylalkohol och förestring av polyakrylsyra. Den kolloidala naturen bibehölls, och Staudinger ansåg detta vara ett bevis för makromolekylteoriens riktighet. Om bivalenser höll ihop kolloidpartiklarna, så borde de påverkas och partiklarna upplösas, när ämnenas natur förändrades så genomgripande. Beviset är dock inte bindande utan mätning av partikelstorlek eller molekylvikt.

Svedbergs ultracentrifugarbeten

Hela problemkomplexet kom att föras ett stort steg framåt genom The Svedbergs ultracentrifugarbeten, som påbörjades år 1923. Med denna nya metod lyckades Svedberg och medarbetare under åren 1925—28 bestämma molekylvikten för en rad äggviteämnen från ovalbumin med 34 500 till hämocyaniner med molekylvikter på flera miljoner. Molekylerna hos en viss protein var likstora eller tillhörde ett fåtal storleksklasser. Därmed var proteinmolekylernas existens som väldefinierade partiklar säkerställd. Detta verkade stimulerande inom hela kolloidkemien.

Viskositetslagen

Under 1920-talets senare del sökte Staudinger energiskt efter metoder för bestämning av makromolekylernas storlek. Kryoskopiska metoder gav inga tillförlitliga mätvärden vid högre molekylvikter än 5000—10 000. Viskositeten hos en polymerlösning kunde däremot alltid mätas med god noggrannhet. Dessutom ökade viskositeten vid en viss polymerkoncentration entydigt med molekylvikten så långt denna kunde mätas. Viskositetens koncentrationsberoende var en besvärlig effekt och för att söka eliminera dess inflytande gjordes mätningarna vid en viss lägsta möjliga koncentration. År 1930 framlade Staudinger sin berömda viskositetslag

$$\eta_{sp}/c = K_m \cdot P \qquad (1)$$

där den specifika viskositeten $\eta_{sp}=\eta_{rel}-1$ och den relativa viskositeten η_{rel} = förhållandet mellan lösningens och lösningsmedlets viskositeter mätta som utrinningstider i en Ostwalds kapillärviskosimeter. Koncentrationen c angavs i gram polymer per liter lösning. P är polymerisationsgraden (=antalet monomera enheter i kedjan) och K_m den empiriska s. k. viskositetskonstanten, vars storlek var bestämd genom kryoskopiska mätningar för molekylvikter upp till 10 000. Utan närmare prövning användes viskositetslagen för att bestämma 10—50 gånger högre molekylvikter, t. ex. för polystyrol löst i bensol. Det är inte ofta en fysikalisk-kemisk lag haft ett så svagt experimentellt underlag och varit så illa utformad men ändå kommit att få så stor betydelse som viskositetslagen. De svåraste bristerna var lätt avhjälpta. η_{sp}/c-värdena extrapolerades till oändlig utspädning ($[\eta]$) och lagen fick formen:

$$[\eta]=K_m \cdot P \qquad (2)$$

Genom osmotiska metoder utsträcktes referensmätningarna till avsevärt högre molekylvikter, vilket gav noggrannare och mer tillförlitliga K_m-värden. Högpolymera ämnen är emellertid oftast *polymolekylära* (innehåller molekyler av många olika storlekar), och varje molekylviktsmätning ger då ett medelvärde. Såväl kryoskopiska som osmotiska molekylviktsbestämningar ger talmedelvärden ($\Sigma n_i M_i / \Sigma n_i$) medan viskositetsmätningar — om viskositetslagen verkligen gäller — ger viktsmedelvärden ($\Sigma n_i M^2_i / \Sigma n_i M_i$), och förhållandet mellan dessa är ofta 1:2. För att eliminera effekten därav på K_m-konstanterna görs numera mätningarna på polymerfraktioner, hos vilka skillnaden mellan molekylvikternas tal- och viktsmedelvärden (M_n och M_w resp.) är så liten som möjligt (10—20 %). Viktsmedelvärden kan dessutom numera erhållas direkt genom mätningar av ljusspridningen från polymerlösningar.

Genom omfattande och noggranna undersökningar — både teoretiska och experimentella — under de senaste 10—15 åren har visats, att Staudingers viskositetslag är ett specialfall av en mer allmän lag

$$[\eta]=K_m P^a \qquad (3)$$

där parametern a beräknats bli 0,5 för tätt hoprullade och 1,0 för av lösningsmedel »fritt genomspolade» molekylkedjor. Raka, stela molekylkedjor ska ge $a=1{,}7-2{,}0$, men experimentellt har a-värden >1 erhållits bara i undantagsfall. Staudingers viskositetslag (ekv. 1 och 2, motsvarar $a=1$) gäller med tämligen god noggrannhet i några få fall, t. ex. för cellulosanitrat med hög kvävehalt (närmare 3 NO_3-grupper per glukosenhet). Men för de flesta andra polymerer har erhållits a-värden <1, t. ex. cellulosaacetat i aceton 0,78, naturgummi i bensol 0,67 och polyisobutylen i diisobutylen 0,64. I verkligheten är nämligen

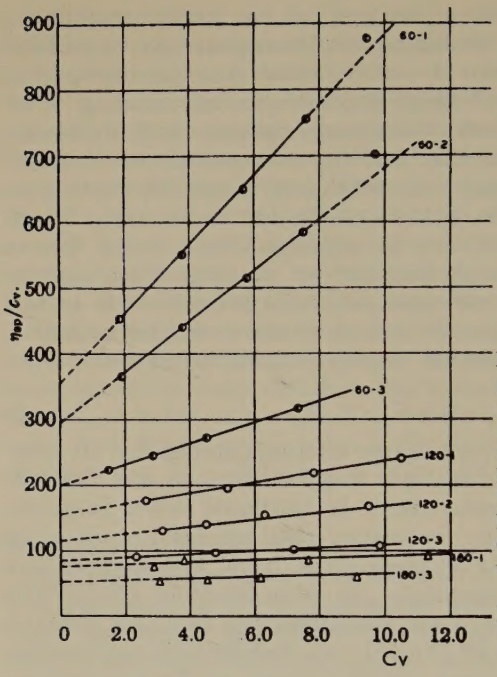


Fig. 1. η_{sp}/c-värden (cv i cm^3 polymer per ml lösning) vid olika koncentrationer (1000×cv på abscissan) för en serie polystyrolfraktioner lösta i toluol vid 30° C. Fraktionen 180—3 har den lägsta ($M_n = 1{,}32 \cdot 10^5$) och 60—1 den högsta molekylvikten ($M_n = 2{,}05 \cdot 10^6$).

Efter mätningar av Alfrey, Bartovics och Mark, J. Am. Chem. Soc. *65*, 2320 (1943).

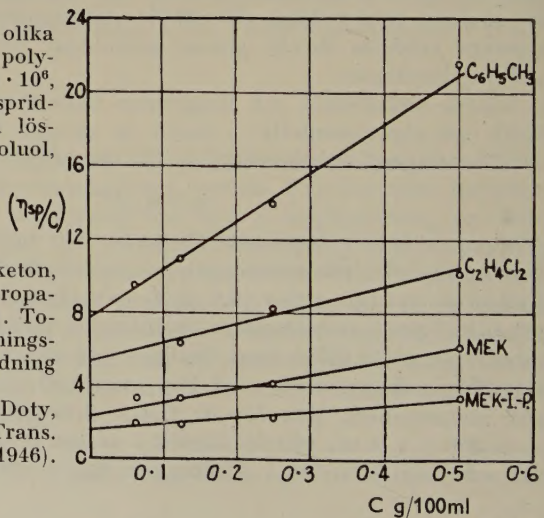


Fig. 2. η_{sp}/c-värden vid olika koncentrationer för en polystyrolfraktion ($M_w = 4 \cdot 10^6$, bestämd genom ljusspridningsmätningar) i olika lösningsmedel vid 26° C: toluol, etylendiklorid, metyletylketon, och metyletylketon-isopropanol (85 : 15 volymsdelar). Toluol är det bästa lösningsmedlet, de övriga i ordning allt sämre.

Efter mätningar av Doty, Affens och Zimm, Trans. Faraday Soc. 42 B, 74 (1946).

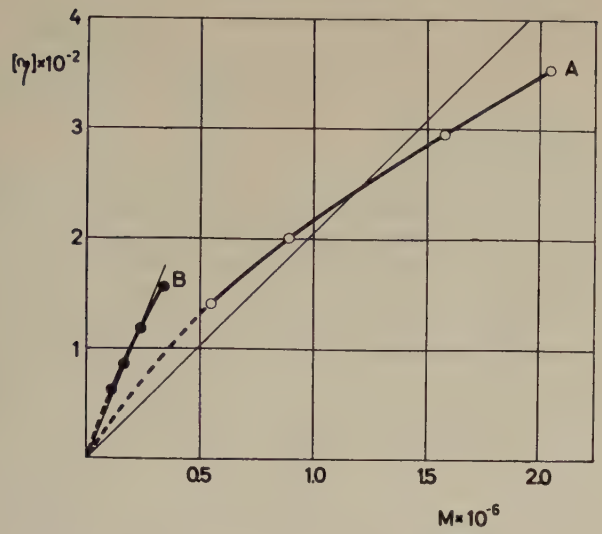


Fig. 3. Viskositeten $[\eta]$ som funktion av molekylvikten (M_n ur osmotiska mätningar) för två serier polystyrolfraktioner (den ursprungliga substansen A polymeriserad vid 60° C, B vid 120° C) lösta i toluol (a=0,70 och 0,80 resp.). Efter mätningar av Alfrey, Bartovics och Mark, J. Am. Chem. Soc. *65*, 2321 (1943).

de flesta molekylkedjorna böjliga och oftast mer eller mindre hoprullade i lösning — det har visats även med andra metoder — och kedjornas sträckning påverkas också av lösningsmedlet. Ett »gott» lösningsmedel ger större utsträckning av molekylkedjan än ett dåligt. Dessa förhållanden belysas av diagrammen i fig. 1, 2 och 3.

Viskositetsmätningar har numera fått en oerhört vidsträckt användning inte bara inom högpolymerforskningen utan också inom tekniken för undersökning och kontroll av olika produkter, t. ex. cellulosa, plaster, lack och oljor.

Makromolekylerna accepteras

Diskussionerna om Staudingers makromolekylteori pågick ända in på 1930-talet och var ibland både häftiga och polemiska. Så sent som år 1932, då Faraday Society hade en diskussion om textilmaterialens kolloidkemi, fanns det forskare som hävdade, att en högpolymer lösning kunde innehålla miceller av mindre molekyler på liknande sätt som tvållösningar och olika oorganiska soler. De senaste två decenniernas forskning har emellertid visat, att Staudingers uppfattning var i

princip den riktiga och den har nu allmänt accepterats. Den diskussion om miceller, som nu pågår, gäller makromolekylernas aggregation i fast fas, t. ex. i fibrer av cellulosa och olika syntetiska högpolymerer.

Molekylbegreppet vidgas

Enligt den klassiska organiska kemien är samtliga molekyler i ett rent ämne identiska. Accepterandet av begreppet makromolekyl innebär en utvidgning av molekylbegreppet, då de långa molekylkedjorna enligt Staudinger visserligen har alltigenom samma uppbyggnad, men är av olika längd. Men enligt de allra senaste årens forskningar är de syntetiska kedjemolekylerna ingalunda så regelbundet byggda, som Staudinger tänkte sig. Dels ligger de monomera enheterna vända åt båda hållen längs kedjan och dels är grening och andra oregelbundenheter långt vanligare än man tidigare trott. Molekylkedjorna hos s. k. kopolymerer — av två eller flera monomerer, som polymeriserat tillsammans — kan vara så oregelbundet uppbyggda, att det i en del undersökta fall, t. ex. i syntetiskt gummi, är ytterst osannolikt, att man någonsin kan hitta två identiska molekyler. Dessa förhållanden nödvändiggör en ytterligare utvidgning av molekylbegreppet och påverkar också normerna för beskrivning av kemiska substansers struktur, identitet och renhet, då både molekylvikter och strukturer sålunda ha en statistisk fördelning hos makromolekylerna i ett syntetiskt högpolymert ämne. Naturens makromolekyler är däremot ofta regelbundet byggda.

Den makromolekylära kemien har alltsedan 1920-talet befunnit sig i en våldsam utveckling, och det är ytterst vanskligt att värdesätta de enskilda forskarnas insatser. Det förefaller dock alltmer klart, att Staudingers pionjärarbete varit av grundläggande betydelse dels genom sin klara och stimulerande målsättning och dels genom den intensitet och konsekvens, med vilken arbetena genomförts. Hermann Staudinger har hitintills tillsammans med sina medarbetare utgivit ca 400 tryckta skrifter om högpolymera ämnen. Av den stora mångfalden forskningsproblem, som behandlas där, har i denna återblick på utvecklingen endast en mycket liten del kunnat tagas upp.

Hermann Staudinger föddes i den sydtyska staden Worms år 1881 och tog sin doktorsgrad i Halle år 1903. Han blev professor i organisk kemi först i Karlsruhe och år 1912 i Zürich vid Eidgenössische Technische Hochschule. År 1926 kallades Staudinger till ett motsvarande ämbete vid Universitetet i Freiburg im Breisgau, där han fortfarande är verksam som chef för ett statligt forskningsinstitut för makromolekylär kemi.

Naturligt tritium, en ny isotop för åldersbestämning

Av dr. techn. Hans von Ubisch, Stockholm

Inledning

I en tidigare uppsats i denna tidskrift har T. Westermark (1) redogjort för den radioaktiva kolisotopen C-14, som bildas i atmosfären genom reaktion mellan neutroner alstrade av den kosmiska strålningen och kvävekärnor. C-14 överföres redan i atmosfären till koloxider och upptages därefter av växter och djur, vilka på detta sätt blir radioaktiva. Aktiviteten blir synnerligen obetydlig men är ändå mätbar. När organismerna dör, slutar de att upptaga nytt radioaktivt kol, och i de fall, då resterna har konserverats, kan man med Geiger-Müller-rör bestämma, hur aktiviteten sjunkit med tiden efter organismens död.

F. W. Libby är den som först påvisat C-14 i organiskt material, och han har visat, att aktivitetsminskningen kan användas för åldersbestämning från lägst några hundra upp till ca 20 000 år. C-14 har en halveringstid av ca 5570 år. I loppet av de första 200 åren efter organismens död sjunker därför aktiviteten med 2,5 %, och i loppet av 20 000 år sjunker den till 8 % av den ursprungliga. Mätfelet kommer att bero på bl. a. variationer i organismernas upptagande av C-14, och — ifall proven är mycket gamla — på för låg aktivitet. Den förra orsaken kan ge ett fel på 100 eller 200 år, den senare gör metoden illusorisk för prov äldre än 20—30 tusen år.

Uppkomsten av tritium

På senaste tiden har Libby (2) närmare studerat den naturliga förekomsten av väteisotopen tritium, H-3, betecknad T. Man skulle kunna kalla C-14 och T »syskon», därför att båda alstras genom kärnreaktioner i kväve orsakade av genom kosmisk strålning alstrade neutroner. Reaktionen vid uppkomsten av C-14 är

$$^{14}N\,(n, H)\,^{14}C, \quad (^{14}C \xrightarrow[5568\ år]{\beta^-} {}^{14}N)$$

och vid uppkomsten av tritium bl. a.

$$\left.\begin{matrix} ^{14}N\,(n, T)\,^{12}C \\ ^{14}N\,(n, T)\,3\,^{4}He \end{matrix}\right\} \quad (T \xrightarrow[12{,}5\ år]{\beta^-} {}^{3}He)$$

Tritium fortlever dels som atmosfärisk vätgas, dels som vatten, sedan det oxiderats. I det senare fallet kan det tagas upp av levande organismer och kan då analogt med C-14 användas för åldersmät-

ningar. Den korta halveringstiden på 12,5 år gör att det användbara mätområdet blir från några år upp till ca 30 år.

Mätning av tritium

Att mäta naturligt tritium är i alla avseenden mycket besvärligare än att mäta C-14. Det senare uppträder i färskt material i en koncentration av ca 10^{-12} av mängden stabilt kol, medan motsvarande tal för tritium är $5—40 \cdot 10^{-18}$, vilket är grovt räknat en miljon gånger mindre. — Till jämförelse kan nämnas, att deuteriumkoncentrationen i vanligt väte är ca $1{,}6 \cdot 10^{-4}$.

Med hänsyn till mättekniken råder följande olikhet mellan C-14 och tritium: C-14 utsänder β-partiklar (elektroner) med energier upp till åtminstone 150 keV, medan tritiums β-partiklar utsändes med blott tiondelen av denna energi. Därför blir strålningens absorption redan i själva preparatet mycket stor. Kol brukar man införa i räknerör som fast substans i relativt stora kvantiteter, som ett »oändligt tjockt skikt». Väte måste däremot användas i gasform, t. ex. som etylen, C_2H_4. Man finner, att tritium kan mätas endast i preparat som är isotopanrikade. Det blir nödvändigt att utgå från flera liter vatten, som anrikas med avseende på deuterium, varvid tritium givetvis anrikas samtidigt och i än högre grad. Denna stora kvantitet vatten måste jämföras med det tiotal gram kol som är tillräckligt för ett prov vid C-14-dateringen. Givetvis ökas felkällorna också genom anrikningsproceduren, enär anrikningsfaktorn ingår i beräkningarna och måste bestämmas med stor noggrannhet.

Libby har trots nämnda svårigheter inte låtit sig avskräcka. Vid sina forskningar har han troligen lyckats erhålla stöd från kretsar, som kan ha ekonomiskt intresse av dylika mätningar, t. ex. lantbruks- och livsmedelsbranscherna. Vi skall nu i stort sett följa Libbys framställning av tillämpningsmöjligheterna (2).

Tritiums spridning genom nederbörden

Tritium bildas i den översta atmosfären. Genom dissociation och återbildning av vattenånga som följd av den intensiva ultravioletta strålningen kommer det bildade tritium att stå i utbyte med vätet i stratosfärens fuktighet. Denna blir sålunda mättad med tritium, och när den genom diffusion och konvektion förflyttas mot lägre höjder, kommer också tritium att närma sig jordytan. I troposfären blandas det med den vattenånga som nyss har bildats genom avdunstning från havet eller från marken. Så småningom kommer fuktigheten och dess tritium ned i form av snö eller regn.

Nederbördens tritiumhalt kommer att bero på tre faktorer: tritiumhalten av den från marken eller havet avdunstande vattenångan,

vattenångans kontakttid med stratosfäriskt tritium (även vattendroppar i molnen kan kemiskt binda gasformig tritium), och produktionshastigheten av tritium.

Fuktighet, som bildas vid avdunstning från havet, har en mycket låg tritiumhalt, därför att all nederbörd som tillförts havet blivit så starkt utspädd. Någon nämnvärd uppsamling av tritium i havet kommer inte att ske på grund av den korta halveringstiden. Helt annorlunda ställer det sig för C-14; dess halveringstid är ca 450 gånger större och det utspädes mycket mindre i havsvatten. Förhållandet mellan totalmängderna av CO_2 i atmosfären och i havsvattnet, löst antingen som CO_2 eller som HCO_3^- och CO_3^{--}, är 1:70, medan motsvarande förhållande för H_2O är 1:100 000. Cirkulationshastigheten av CO_2 mellan atmosfären och havet blir relativt stor och god omblandning sker. C-14-koncentrationen är därför ungefär densamma i havet som i atmosfären, och man kan datera marina organismer medelst C-14, men ej medelst tritium!

Produktionshastigheten av tritium kommer att bero på den kosmiska strålningens intensitet. Denna är till exempel ca 4 gånger större vid 50° geomagnetisk bredd än vid ekvatorn.

Om man nu kan mäta nederbördens tritiumhalt och man antager, att det primärt rör sig om tritiumfri oceanisk fuktighet, skulle man enligt Libby ha en möjlighet att bestämma nederbördens atmosfäriska förhistoria.

Regn som faller över fastlandet utspädes långt mindre än i havet, varför fuktighet som avdunstat från fastlandet har förhållandevis hög tritiumhalt. Det är därför ej förvånande, att fuktighet som cirkulerar över den nordamerikanska kontinenten befunnits vara mycket rikare på tritium än t. ex. regn, som faller i Nordeuropa och som torde vara av oceanisk härkomst. Man har också observerat, att tritiumhalten är något lägre kring de stora nordamerikanska sjöarna.

Tritium är en mycket viktig beståndsdel i vätebomben, men på grund av de små kvantiteter, som överhuvudtaget förekommer i naturen, kan inga intressenter i vätebomber dra fördel av sitt speciella geografiska läge. Totalmängden i naturen lär vara 5—10 kg.

Praktiska tillämpningar

Tritiumbestämningar ger möjlighet att avgöra, vilket år vin, sädeskorn, konserver m. m. hänför sig till. Växterna tar ju upp det tritiumhaltiga regnvattnet. Men enligt vad som nämnts ovan kan man inte utan vidare jämföra tritiumhalten hos europeiska och amerikanska produkter. Någon dylik systematisk skillnad förekommer, såvitt man hittills funnit, inte i fråga om C-14, beroende på att för-

hållandena för detta medger en betydligt jämnare spridning över jordklotet och över vatten och land.

Tritiumhalten hos källvatten kommer att bero på den tid som vattnet befunnit sig under jorden, dvs. på storleken av de underjordiska vattenreservoarer som vattnet passerat igenom. Ifall alltså tritiumhalten är hög, kan man förmoda att det rör sig om vatten, som befunnit sig i jorden endast en kort tid och att vattentillgången kommer att vara beroende på säsongmässiga nederbördsfluktuationer. Dylika undersökningar har dock sin betydelse under andra klimatiska och topografiska förhållanden än som är rådande i t. ex. Sverige.

Om förekomsten av He-3

I den övre delen av atmosfären kommer lätta atomer såsom väte och helium att läcka ut till världsrymden, däremot knappast tritium på grund av dess korta livslängd. Tritiums stabila sönderfallsprodukt He-3, som ackumuleras i atmosfären, kommer dock att läcka ut i likhet med väte och övrigt helium. Man kan beräkna produktionen av tritium och också av He-3, som dels är en sönderfallsprodukt av tritium och dels produceras direkt (genom neutronreaktioner, analoga med dem som ger tritium), och man kan mäta koncentrationen av He-3 i atmosfären. Under antagande av att produktionen har varit konstant under geologiska perioder och att den är lika med utläckningshastigheten har Fireman (3) beräknat en medeluppehållstid i atmosfären för He-3 av 3—6 miljoner år.

Till sist skall en geokemisk synpunkt på He-3 beröras. Halten av He-3 i atmosfäriskt helium är 1 : 7700, men i naturgas och gas ockluderad i jorden har man t. ex. mätt 1 : 59 000 (ett tabellerat värde). Man kan ge en åtminstone kvalitativ förklaring härav genom att hänvisa till produktionen av tritium och He-3 i atmosfären och i regnvattnet. I jordens inre däremot produceras rent He-4 som sönderfallsprodukt av uran och torium. Härtill kommer det He-3 och He-4, som härstammar från universums bildning och som har funnits upplöst i jordens inre. Ovanligt låga halter av He-3 i naturgas skulle kunna tyda på förekomst av uran och torium, och detta kan eventuellt komma till användning i praktiken för uppletande av dessa ämnen. Denna metod har faktiskt patenterats (4).

(1) T. Westermark, Åldersbestämning medelst radioaktivt kol enligt Libby. Elementa *36*, 85; 1953.
(2) W. F. Libby, The potential usefulness of natural tritium. Proc. Nat. Acad. Sci. *39*, 245; 1953.
(3) E. L. Fireman, Measurement of the (n, H^3) cross section in nitrogen and its relationship to the tritum production in the atmosphere. Phys. Rev. *91*, 922; 1953.
(4) J. Menke, U. S. Patent 2, 551, 499; May 1, 1951.

NORMA

BORDSINSTRUMENT
i precisionsutförande

o genomgående av klass 0,5 och försedda med **stålkåpa** (ej bakelit) som avskärmar även sidled. Därigenom ökas också instrumentens stabilitet.

3 mm spegelskala med knivvisare. Utföres med upp till fyra mätområden med nedanstående ax. resp. min. områden. Med Normas strömtransformator kunna f. ö. – utöver vad här angives strömmätningsområdena utökas upp till 600 A.

RIDJÄRNMÄTSYSTEM
lägsta område 0–6 V resp. 0–10 mA
högsta „ 0–520 V resp.0–50 A.

RIDSPOLEMÄTSYSTEM
lägsta område 0–18 mV resp. 0–25 μA
högsta „ 0–600 V resp. 0–30 A
(med torrlikriktare eller termokors på begäran)

VATTMETRAR
lägsta område 50 mA, 12 V
högsta „ 5 A, 520 V

DUBBELWATTMETRAR
2×5 A, 2×130/260 V
Cos φ =0,5 och 1

EFFEKTFAKTORMETER FÖR TREFASSTRÖM
5 A, 130 V (260/520 V)

TRESYSTEMIGA WATTMETRAR
Data på begäran

essutom levereras
uxmetrar, luxmetrar,
mperaturmetrar, direkt-
sande ohmmetrar m.m.
nabb och noggrann ser-
ce med originalreservdelar.

PHILIPS

ätinstrumentavdelningen, Stockholm 6. Tel. 340580, för rikssamtal 340680

SVENSKA FYSIKERSAMFUNDETS PUBLIKATION

KOSMOS

band 31 har utkommit med följande innehåll:

1. F. Zernike och faskontrastmetoden. Av fil. lic. Sven Lennander.
2. Den nya fysiska institutionen i Lund. Av professor Bengt Edlén.
3. Termistorer, transistorer och andra halvledarelement. Av fil. lic. Dick Lundqvist.
4. Riktad sprängverkan. Av fil. lic. C. G. Jennergren.
5. Gasabsorptionsspektra inom mikrovågområdet. Av fil. lic. Gunnar Erlandsson.
6. Isotopanrikning genom elektrolytisk jonvandring. Av civilingenjör Arnold Lundén.
7. Neutronflödesmätningen — ett kärnfysikaliskt mätproblem. Av fil. lic. Karl-Erik Larsson.
8. Radioaktiva atomkärnors elektriska och magnetiska egenskaper. Av fil. lic. Tor Ragnar Gerholm.

Boken tillställes samfundets medlemmar *inbunden* jämte kvitto på medlemsavgift som postförskottsförsändelse å kr. 12:—. Medlemskap erhålles efter hänvändelse till **Fil. lic. Sven Lennander, Fysikum, Uppsala.** Även institutioner och bibliotek antagas som medlemmar.

Samfundets medlemmar kunna i mån av tillgång erhålla bundna exemplar av äldre Kosmos-band till ett pris av 10 kr per styck, bd 27 och senare à 12 kr.

Nedsatt pris!

PROBLEMBOKEN

redigerad av Alvar Lenning

140 matematiska, geometriska, mekaniska och fysikaliska problem med lösningar och kommentarer ur Teknisk Tidskrifts »Problemhörna» 1940—1950.

144 sidor, häftad, illustrerad
Har kostat 15 kr. Nu endast 10 kr.

Rekvireras från TEKNISK TIDSKRIFT
Postbox 841 Sthlm 1 Tel. 106566 Postgiro 1102

Fotogrammetri II

Av professor B. Hallert, Stockholm

I den följande framställningen, som utgör en fortsättning på uppsatsen »Fotogrammetri I» (Elementa 1952, s. 93), skall några av fotogrammetrins viktigaste förutsättningar och tillämpningar närmare beröras.

Några geometriska frågor

I den förra uppsatsen antyddes, att centralprojektionen är fotogrammetrins viktigaste förutsättning från geometrisk synpunkt (jfr bl. a. fig. 1—5). De geometriska egenskaperna hos centralprojektionen är följaktligen av grundläggande betydelse för fotogrammetrin.

Då ett föremål avbildats genom centralprojektion, blir vissa geometriska egenskaper överförda oförändrade till bilden. Sådana egenskaper benämnes *projektiva*, och de behandlas i en speciell form av geometrin, som benämnes *projektiv geometri*. Åtskilliga av den projektiva geometrins satser kan direkt tillämpas inom fotogrammetrin, som i sin tur klart åskådliggör vederbörande satser.

Av grundläggande betydelse är centralprojektionens egenskap att avbilda punkter såsom punkter och räta linjer såsom räta linjer. I det allmänna fallet råder *icke* likformighet emellan figurer i föremål och bild, medan däremot det s. k. *dubbelförhållandet* lätt kan visas vara en geometrisk egenskap som icke förändras genom centralprojektion. Om fyra punkter A, B, C, D, (fig. 7) på en rät linje l i föremålet avbildats i motsvarande punkter A_1, B_1, C_1, D_1 i bilden, så gäller dubbelförhållandet $(ABCD)=(A_1B_1C_1D_1)$ eller utskrivet

$$\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{A_1C_1}{B_1C_1}:\frac{A_1D_1}{B_1D_1} \qquad (1)$$

Denna sats, som bevisades redan under 3:e århundradet efter Kristus (Pappus' sats), är av fundamental betydelse för såväl den projektiva geometrin som för fotogrammetrin. Den innebär att man med kännedom om läget av tre motsvarande punkter på räta linjer i föremål och bild alltid kan konstruera eller beräkna läget av motsvarigheten till en fjärde punkt på samma räta linje i föremål eller bild. Om punkternas lägen på resp. räta linjer anges med koordinater x och x' i föremål och bild (fig. 7), kan uttrycket (1) lätt omformas till

$$x=\frac{a_1x'+b_1}{a_4x'+1} \qquad (2)$$

Koefficienterna a_1, b_1 och a_4 är funktioner av de tre givna punktparens koordinater och även av de båda räta linjernas läge inbördes och i förhållande till projektionscentrum.

Emellan punkter i ett plan i föremålet och motsvarande punkter i bilden råder ett med (2) analogt samband. Om punkterna i föremålets plan är angivna med koordinaterna x, y och i bildens plan (fig. 8) med koordinaterna x', y', är detta samband av formen:

$$x=\frac{a_1x'+b_1y'+c_1}{a_4x'+b_4y'+1};\quad y=\frac{a_2x'+b_2y'+c_2}{a_4x'+b_4y'+1} \tag{3}$$

Uttrycken är brutna lineära sådana med samma nämnare och innebär, att det koordinatmässiga sambandet emellan punkter i två plan som avbildats i varandra med centralprojektion är bestämt av 4 par motsvarande punkter. Det erfordras nämligen bestämning av 8 koefficienter för att uttrycken (3) skall kunna användas för transformation av punkter från det ena planet till det andra. Av de fyra erforderliga punkterna får inte tre ligga på samma räta linje. Detta uttryckes vanligen genom villkoret

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_4 b_4 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Det är vidare av intresse att konstatera, att den oändligt avlägsna linjen i planet x, y avbildas såsom räta linjen $a_4x'+b_4y'+1=0$ i planet $x'y'$. Uttrycken (3) är av grundläggande betydelse för vad som inom fotogrammetri benämnes *rektifiering*.

Om ett plant föremål fotograferats (avbildats på ett bildplan genom sträng centralprojektion), kan godtyckliga punkter i bilden lägesbestämmas i ett koordinatsystem i föremålet, om minst fyra punkter i detta system är givna och kan identifieras i bilden. (Villkoret att tre punkter icke får ligga på en rät linje måste alltid observeras.) Detta är av stor praktisk betydelse inom fotogrammetrin. Om exempelvis plan terräng flygfotograferas med en kamera, som ger en sträng centralprojektion, kan en karta framställas över terrängen, om varje bild innehåller 4 i terrängen koordinatbestämda punkter. Inga andra upplysningar om kameran erfordras än att den förmår lämna stränga centralprojektioner. Inte heller behöver man känna kamerans läge vid fotograferingen eller fotograferingsriktningen.

För att genomföra rektifieringen finns ett antal metoder, numeriska, grafiska och optiskt-mekaniska, eventuellt i kombination. Den noggrannaste men samtidigt mest tidsödande metoden är direkt användning av uttrycken (3). I praktiken användes mest en optisk-mekanisk metod, som innebär att den fotografiska bilden i en rektifierings-

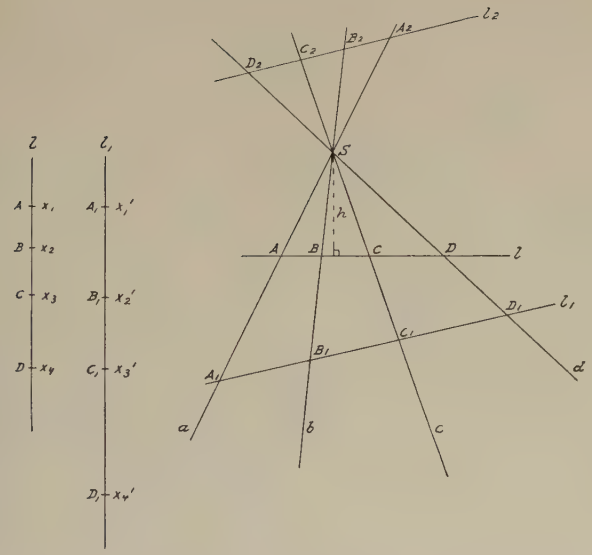


Fig. 7. Ett strålknippe genom S såsom centrum skär de räta linjerna l, l_1 och l_2. Punktraderna på dessa linjer är i perspektiviskt läge. Om strålknippet försvinner, återstår projektiviteten mellan punkterna.

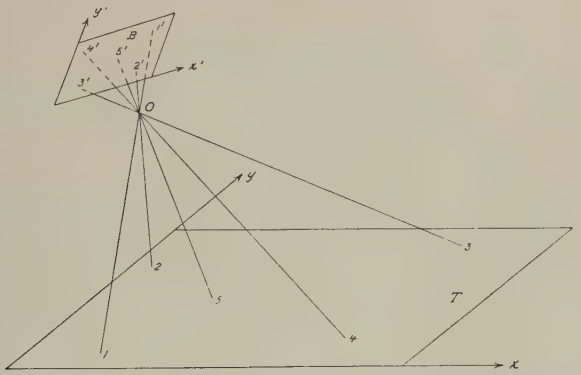


Fig. 8. Avbildning av punkter från ett plan T i ett annat plan B genom centralprojektion med centrum O. Om en stråle, t. ex. *1*--*1'*, tages som axel för plan genom punkterna 2—5, skäres detta *planknippe* av planet T i ett *strålknippe* från *1* såsom centrum. Planknippet skärs av planet B i ett strålknippe från *1'* såsom centrum. Strålknippena i T och B ligger alltså i *perspektiviskt läge* via planknippet och blir därmed *projektiva*. Koordinaterna för punkterna i de båda planen kan mätas i de antydda systemen.

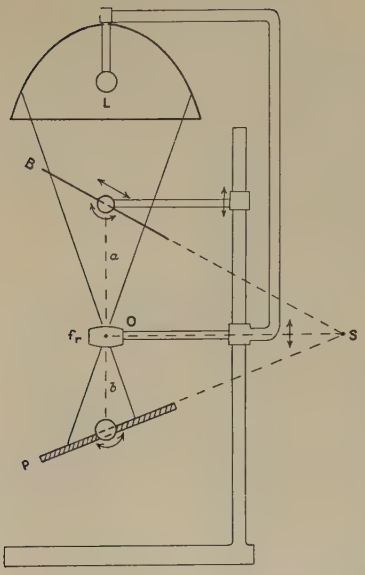


Fig. 9. Schematisk bild av rektifieringsapparat. Bilden *B* belyses med ljuskällan *L*, vars ljus reflekteras av spegeln. Projektionen sker genom objektivet *O* i projektionsplanet *P*.
Såväl de viktigaste frihetsgraderna som avbildningsvillkoren är antydda i figuren.
(Lexikon der Vermessungskunde.)

apparat projicieras genom objektiv på ett projektionsplan enligt samma principer som i en fotografisk förstoringsapparat (fig. 9). Apparaten skall var försedd med sådana inställningsmöjligheter, att 4 punkter i bilden skall kunna avbildas i sina motsvarigheter i kartan, som placeras på projektionsbordet. I det allmänna fallet fordras 5 sådana inställningsmöjligheter (ändring av förstoringen, bildens lutning, vridning omkring projektionsriktningen samt förskjutning utmed och vinkelrätt mot lutningsaxeln). För att den projicierade bilden skall erhållas med erforderlig skärpa måste bl. a. linsformelns villkor uppfyllas. Detta sker vanligen automatiskt. Då de 4 givna punkterna sammanfaller med projektionerna av motsvarande punkter i bilden, kan den projicierade bilden ritas av och en karta erhålles i den skala i vilken de givna punkterna karterats. Om bilden projicieras på ett fotografiskt papper, ger detta efter vederbörlig fotografisk behandling en i bestämd skala rektifierad bild av det fotograferade föremålet. På detta sätt framställda rektifierade kopior av flygbilder kan direkt användas som kartor och kan hopfogas till sammanhängande kartor över större områden. På detta sätt framställes s. k. fotokartor t. ex. den under framställning varande riksfotokartan över Sverige i skala 1 : 10 000. De för rektifieringen erforderliga kända punkterna kan erhållas efter mätningar på marken (triangel- eller polygonpunkter) eller efter punktbestämning med

fotogrammetriska metoder (s. k. fotogrammetrisk triangulering), som nedan något närmare skall beröras.

I princip fordrar rektifieringsförfarandet att terrängen är plan. Jfr fig. 2. Alltefter den önskade kvaliteten i den slutliga kartan eller avbildningen kan emellertid större eller mindre höjdskillnader tillåtas. I bildens centrala delar inverkar höjdskillnadsförskjutningarna minst. Ett ofta använt sätt att undvika alltför stora lägesfel vid framställning av fotokartor över kuperad terräng är därför att fotografera med stor övertäckning så att endast centrala delar av varje bild behöver utnyttjas. Rektifieringen bör självfallet ske med hjälp av punkter som ligger i samma plan.

Rektifiering är att anse såsom ett specialfall av fotogrammetrins huvuduppgift att överföra centralprojektioner till ortogonalprojektion (jfr Elementa, 1952, sid. 97). För att lösa huvuduppgiften erfordras i allmänhet minst två centralprojektioner (bilder). Grunddragen av det viktigaste förfarandet har redan skisserats i den tidigare uppsatsen. Här skall endast tillfogas, att den modell som kan framställas genom inpassning i perspektiviskt läge av strålarna från de båda bilderna (jfr fig. 5) i det allmänna fallet har följande koordinatmässiga samband med det fotograferade föremålet:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1}{a_4x' + b_4y' + c_4z' + 1} \\ y &= \frac{a_2x' + b_2y' + c_2z' + d_2}{a_4x' + b_4y' + c_4z' + 1} \\ z &= \frac{a_3x' + b_3y' + c_3z' + d_3}{a_4x' + b_4y' + c_4z' + 1} \end{aligned} \qquad (4)$$

där x, y, z och x', y', z' är koordinater för motsvarande punkter i föremål och modell. Sammanlagt 15 koefficienter erfordras för kännedom om koordinatsambandet, vilket kräver kännedom om läget av 5 motsvarande punkter i föremål och modell. Man bör observera sammanhanget emellan uttrycken (1), (2) och (3), som alla framställer projektiva samband.

En betydande förenkling av dessa geometriska förhållanden (3) vinnes genom att strålkärvarna[1] vid bearbetningen göres noggrant kongruenta med strålkärvarna vid fotograferingen, dvs. att strålgången från fotograferingen noggrant rekonstrueras vid bearbetningen. Under sådana förutsättningar blir nämligen modellen likformig med det fotograferade föremålet i en skala som bestämmes av förhållandet emellan basen vid fotograferingen och basen vid bearbetningen. Det geometriska sambandet emellan modellen och

[1] Med strålkärve menas sammanfattningen av alla strålar genom en punkt.

föremålet blir under sådana förhållanden 7 parametrar, nämligen skalan, 3 förskjutningar och 3 rotationer.

För att kunna rekonstruera strålgången från fotograferingen krävs kännedom om läget av projektionscentrum i förhållande till bilden samt uppgift om eventuella störningar i centralprojektionen. Dessa data brukar benämnas kamerans *inre orientering* och kännetecknar kamerans egenskap av *mätkamera.*

Läget av projektionscentrum i förhållande till bilden anges vanligen genom dels fotpunkten i bilden (bildhuvudpunkten) för normalen från projektionscentrum och dels längden av denna normal (kamerakonstanten). Störningar i centralprojektionen på grund av objektivets egenskaper betecknas *felteckning* och anges med en felteckningskurva. Dessa data skall vara bestämda för varje mätkamera och medger att strålgången kan rekonstrueras på numerisk, grafiskmekanisk eller optisk väg. Det sista förfarandet är lättast att beskriva och har berörts i den tidigare uppsatsen (sid. 98).

För att inpassa två rekonstruerade strålkärvar i perspektiviskt läge (då samtliga sammanhörande strålpar skärs) krävs att de båda strålkärvarna bringas att inta samma inbördes läge som vid fotograferingen. Detta innebär att man på något sätt måste kunna bestämma vardera strålkärvens läge i rymden vid fotograferingen. De data som anger detta läge kallas den *yttre orienteringen*, som består av 6 parametrar för varje strålkärve, liksom f. ö. för varje fast kropp. Vid fotograferingen från marken är det i allmänhet lätt att i samband med fotograferingen bestämma läget av projektionscentrum i form av tre koordinater och kameraaxelns riktning (två vinklar) samt strålkärvens läge omkring denna riktning (en vinkel). Men vid flygfotografering kan sådana data bestämmas endast högst approximativt eller knappast alls, utan den yttre orienteringen måste bestämmas i samband med bearbetningen av bildmaterialet. Detta sker i praktiken vanligast genom en s. k. *inskärning av dubbelpunkt i rymden.* Förfarandet har i sina huvuddrag berörts i den tidigare uppsatsen på sid. 98. En optisk modell framställes genom att minst 5 strålpar bringas att skära varandra genom ändringar av de båda projektorernas (fig. 5) yttre orientering. Förfarandet grundas delvis på uttrycken (3), och benämnes *inbördes orientering.* Den optiska modellen skalbestämmes och modell inklusive projektorer inpassas genom förskjutningar och vridningar i terrängens koordinatsystem. För dessa operationer, som benämnes den *absoluta orienteringen* krävs kännedom om stödpunkter i terrängen, som kan identifieras i modellen. Per modell fordras minst tre punkter av vilka två skall vara fullständigt bestämda (i såväl plan som höjd), medan den tredje endast behöver vara höjdbestämd.

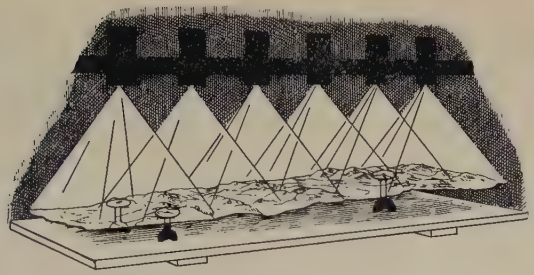


Fig. 10. Rymdtrianguleringens princip i multiplexapparaten.

Projektorernas lägen i förhållande till den karta, på vilken stödpunkterna karterats, kan mätas efter inpassningen, och därmed är den yttre orienteringen från fotograferingen bestämd. Modellen kan vidare direkt avritas eller karteras (jfr fig. 5).

Genom att koppla samman ett större antal projektorer kan längre bildstråk behandlas på i princip samma sätt. Genom den övertäckning av 60 %, som förutsättes vid fotograferingen (fig. 3), kan den yttre orienteringen delvis överföras från modell till modell i instrumentet, och för hela stråkets inpassning i markens koordinatsystem krävs i princip stödpunkter endast i början och slutet av stråket (fig. 10). Genom detta förfarande, som benämnes *rymdtriangulering*, kan ett glest stödpunktsnät på marken förtätas för den senare detaljerade kartläggningen.

Optik och fotografi

Den fotografiska bilden, som är utgångsmaterialet för all fotogrammetrisk verksamhet, måste fylla högt ställda anspråk i flera avseenden. Från geometrisk synpunkt skall den vara en strång och pålitlig centralprojektion av det fotograferade föremålet. Den skall vidare redovisa även små och tätt belägna detaljer med tillräckligt god definition, även om själva fotograferingen måste utföras under mindre gynnsamma förhållanden såsom t. ex. från flera kilometers flyghöjd. Höga krav ställes m. a. o. på såväl kamerans optik som på negativmaterialet och dess fotografiska behandling.

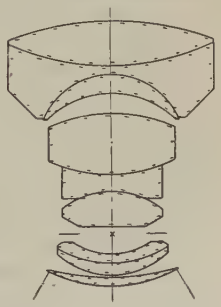


Fig. 11. Ett modernt fotogrammetriskt objektiv i genomskärning.

Ett fotogrammetriskt objektiv är en komplicerad och dyrbar produkt, som framställts efter ett besvärligt räknearbete och med långt driven teknik. Ett exempel på ett modernt objektiv för flygkameror visas i fig. 11.

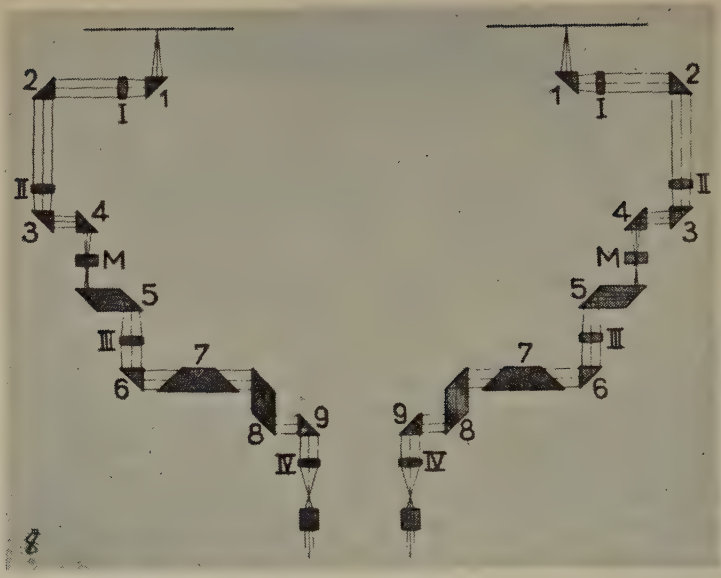


Fig. 12. Strålgången i ett precisionsinstrument för fotogrammetrisk dubbelbildsbearbetning. Strålarna leds från bilderna (överst) via en serie prismor och linser till okularen (nederst). Vid *M* införes de identiskt lika mätmärkena i strålgångarna.

I de fotogrammetriska bearbetningsinstrumenten förekommer ofta komplicerade optiska strålgångar, där såväl objektiv som prismor av olika slag kombineras. Jfr fig. 12.

Negativmaterialets egenskaper kan variera betydligt allteftersom det skall användas för mark- eller flygfotogrammetri. I det förra fallet kan känsligheten göras tämligen låg, eftersom exponeringstiden kan väljas lång, om föremålet för fotograferingen ligger stilla. Vid flygfotografering däremot måste korta exponeringstider användas på grund av flygplanets hastighet, och därför måste den fotografiska emulsionen vara högkänslig. I övrigt skall emulsionen vara färgkänslig (pankromatisk) samt ha en brant gradationskurva. För att hindra den av atmosfären orsakade diffusa blå strålningen att påverka emulsionen användes alltid någon form av filter, i regel gulfilter. Såsom emulsionsbas förekommer inom markfotogrammetrin mest glasplåtar, medan flygkameror som regel använder film. På senare tid har dock glasplåten alltmera vunnit användning även för flygfotografering, särskilt då höga noggrannhetskrav föreligger.

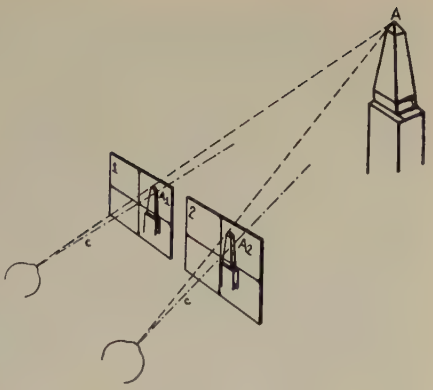


Fig. 13. Principen för indirekt stereoseende. I stället för att direkt betrakta föremålet *A* betraktar man de båda fotografiska bilderna A_1 och A_2, varvid samma effekt erhålles, om de geometriska förhållandena är likartade.

Moderna negativ medger en bestämning av bildkoordinater med en noggrannhet av storleksordningen 0,01—0,03 mm.

Stereoseendet och stereomätning

Stereoseendet, dvs. vår förmåga att se och uppfatta föremål i alla dessa tre dimensioner, är av den allra största betydelse inom fotogrammetrin.

Stereoseendet grundas framförallt på att vartdera ögat uppfattar en bild av det betraktade föremålet. Bilderna i de båda ögonen blir något olika på grund av föremålets utsträckning i djup och ögonens inbördes avstånd (jfr fig. 4). Då de båda bilderna sammanföres i hjärnan, uppfattas olikheterna såsom djupintryck och föremålet framträder i alla sina tre dimensioner. Emellertid kan de direkt uppfångade bilderna av föremålet ersättas av fotografiska bilder, som fotograferats från olika stationer och som betraktas med var sitt öga under likartade förhållanden som vid direkt betraktning av föremålet (fig. 13). Det fotograferade föremålet framträder då i alla tre dimensionerna. Djupverkan kan bli överdriven av olika orsaker, t. ex. om basen vid fotograferingen (avståndet emellan de båda bilderna vid fotograferingen) är större än ögonbasen. Detta är i allmänhet fallet inom fotogrammetrin, där t. ex. vid flygfotografering basen kan uppgå till flera km. Den därigenom orsakade överdriften av det fotograferade föremålets djupförhållanden vid stereoskopisk betraktning av bilderna är synnerligen utpräglad och bidrar väsentligt till den höga noggrannheten, som kan erhållas vid fotogrammetriska arbeten. Genom den stereoskopiska betraktningen underlättas vidare *samordningen* av de båda bildernas detaljinnehåll högst betydligt, vilket är av stor betydelse för mätningarnas tillförlitlighet.

Det nyss berörda villkoret att vartdera ögat samtidigt med det

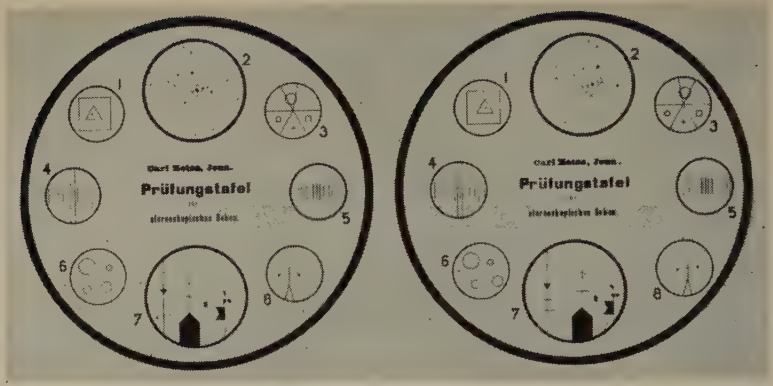


Fig. 14. Provtavla för stereoseende. Försök betrakta vardera av de båda bilderna med var sitt öga samtidigt. Man finner att en tredimensionell figur uppstår, där man kan bedöma de ingående delfigurernas avståndsföljd.

andra skall se endast en bild kräver i allmänhet speciella anordningar. Efter någon övning kan man dock lära sig betrakta stereoskopiska bilder utan hjälpmedel genom att ställa ögonaxlarna parallella och samtidigt ackommodera för seende på nära håll (bilderna skall vara placerade så att avståndet emellan sammanhörande detaljer är ungefär ögonavståndet, dvs. omkring 65 mm). I början underlättas förfarandet, om man placerar en pappskiva el. dyl. emellan bilderna. Pröva de egna ögonen på fig. 14, som är en provtavla för undersökning av stereoseendet. Figurerna skall framträda i tre dimensioner, och deras inbördes läge i djup skall angivas.

För att bekvämare skilja isär de båda bilderna vid betraktningen finns ett antal hjälpmedel av olika slag. Inom fotogrammetrin användes mest stereoskopprincipen, fig. 15. Det enkla *fickstereoskopet* (till höger på figuren) består av två linser med ett inbördes avstånd av omkring ögonavståndet. Då ögonen betraktar stereoskopiska bilder genom linserna, erhålles skarpa bilder vid nära parallella ögonaxlar, vilket motsvarar förhållandena vid stereobetraktning av avlägsna föremål. Samtidigt erhålles en viss förstoring. För betraktande av större bildformat användes spegelstereoskop (det större instrumentet i figuren). Genom två speglingar förstoras betraktningsbasen till omkring 25 cm. Denna princip användes i många stora stereofotogrammetriska instrument vid betraktande av bildpar i samband med mätning. Jfr fig. 12.

Bland andra hjälpmedel för stereobetraktning märks *anaglyf- och polarisationsmetoderna.* Vid anaglyfmetoden trycks eller projicieras de båda bilderna i olika färger (komplementfärger) över varandra.

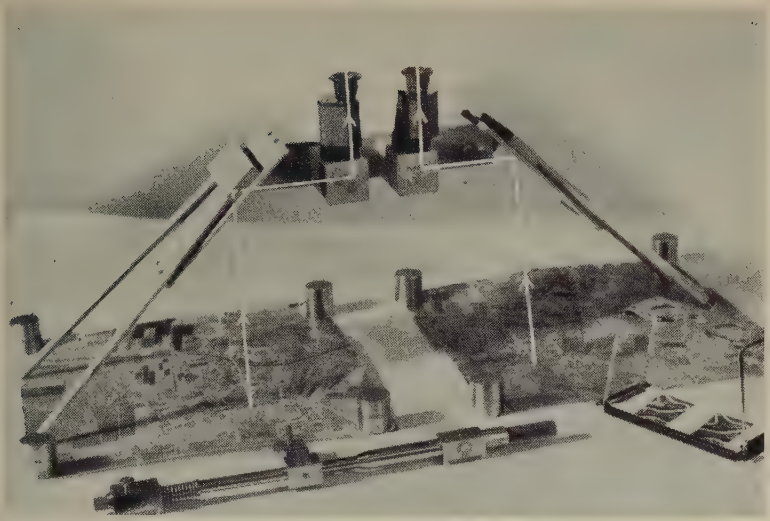


Fig. 15. Två olika slag av stereoskop. Fickstereoskop t. h. och spegelstereoskop med strålgången antydd.

Då man använder glasögon, där glasen är färgade i respektive färger t. ex. rött och grönt, ser vartdera ögat endast en av de båda bilderna, och därmed är den viktigaste förutsättningen för stereoseende uppfylld. Förklaringen till förfarandet är enkel. Vid seende genom t. ex. det röda glasögat uppfattar ögat pappersbakgrunden såsom röd. Den i rött tryckta bilden framträder därför inte, medan den gröna bilden framstår såsom svart. Det med grönt glasöga försedda ögat ser av samma anledning den i rött tryckta bilden som svart medan den gröna icke uppfattas. Vid projicierade bilder erhålles samma effekt, men proceduren är något olika. I multiplex (fig. 5) användes nu nämnda förfarande.

Genom användning av polarisationsfilter och polariserande glasögon kan liknande effekt uppnås. Polarisationen av respektive bilder och i glasögonen av respektive bilder och i glasögonen skall äga rum i mot varandra vinkelräta plan. Detta förfarande användes bland annat vid visning av tredimensionell film.

Steget från stereoskopisk uppfattning av ett föremål till *mätning* i den tredimensionella modellen är icke långt. Om man nämligen på identiska punkter i de båda bilderna, som betraktas stereoskopiskt, inför identiskt lika mätmärken, sammansmälter dessa märken till ett enda, som synes sammanfalla med den modellpunkt, som representeras av de båda detaljpunkterna i bilderna. Om de båda mätmär-

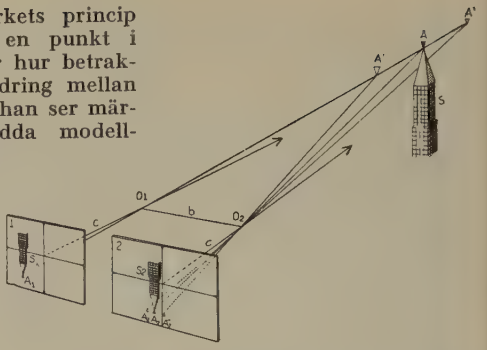


Fig. 16. Det vandrande märkets princip använd för inställning på en punkt i stereomodellen. Figuren visar hur betraktaren uppfattar märkets vandring mellan ytterpunkterna och även hur han ser märket inpassat på den avsedda modellpunkten (Cassinis).

kena (delmärkena) förflyttas *mot eller från varandra,* får observatören uppfattningen, att det av mätmärkenas sammansmältning bildade märket (rymdmärket) förflyttas i djup, alltså mot eller från honom (fig. 16). Vid en *parallellförflyttning* av delmärkena i sidled eller tvärled uppfattar observatören rymdmärket såsom vandrande i modellen i motsvarande riktningar. Genom lämpliga förflyttningar av delmärkena kan alltså rymdmärket bringas att sammanfalla med godtyckliga punkter i den stereoskopiska bilden. Detta är i grova drag det *vandrande märkets princip,* som är grundläggande för varje form av stereoskopisk mätning. Emellan delmärkenas förflyttningar i bilderna och rymdmärkets förflyttning i stereobilden finnes en (vanligen) enkel relation, som medger att koordinater kan bestämmas för godtyckliga punkter i stereobilden. Genom någon form av koordinattransformation kan därefter de fotogrammetriskt bestämda koordinaterna överföras till föremålets koordinatsystem.

På dessa principer grundas arbetsförfarandena i stereofotogrammetriska instrument av alla slag. Det finns såväl enkla och jämförelsevis billiga sådana (t. ex. multiplex, fig. 5) som komplicerade och mycket dyrbara (t. ex. autografen A 7, fig. 6).

Precisionen kan drivas mycket långt. Som exempel kan nämnas att medelfelen i koordinatbestämning av terrängpunkter ur flygbilder i precisionsinstrument normalt uppgår till omkring $\frac{1}{5000}$ av flyghöjden.

Användningsområden

Med de ovan skisserade förfarandena kan en mångfald mätningsuppgifter av olika slag lösas. Främst står kartläggning av terräng, som genom fotogrammetrin undergått en revolutionerande utveckling. I så gott som alla länder användes numera flygfotogrammetri för kartläggning i såväl i små skalor för översiktsändamål som i stora skalor för specialuppgifter t. ex. lantmäteriförrättningar. Betydande vinster i tid, ekonomi och noggrannhet har gjorts.

Därutöver har fotogrammetrin visat sig kunna användas för ett stort antal speciella mätningsuppgifter, från astronomi till mikroskopi. Principerna är i stort sett desamma som beträffande kartläggning av terräng, det är närmast endast dimensionerna som växlar. I många fall, t. ex. då det gäller avbildning och uppmätning av föremål i rörelse såsom vattenvågor eller mycket snabba förlopp såsom explosionen av en atombomb, har fotogrammetrin visat sig vara den enda möjligheten. Genom röntgenfotogrammetri kan man även göra mätningar av punktlägen inne i föremål. Denna teknik är självfallet av den största betydelse inom medicinen.

Fotogrammetrin brukar ibland indelas i två stora huvudgrupper alltefter användningen. Man talar om *topografisk* eller *kartografisk* fotogrammetri å ena sidan, då huvuduppgiften är egentlig kartläggning, och *specialfotogrammetri* å den andra, då mätningsuppgiften icke syftar till egentlig kartläggning utan har en speciell karaktär. Ett typiskt exempel på specialfotogrammetri är mätningar av deformationer hos föremål, som i många fall kan utföras fullständigare och säkrare än med direkta metoder.

Den fotografiska bildens egenskap av dokumentariskt underlag för mätningar öppnar helt nya perspektiv för åtskilliga verksamhetsområden. En brottsplats t. ex., som fotograferas med mätkameror innan några detaljer vidrörts eller flyttats, kan när som helst efteråt noggrant uppmätas, och mätningarna kan lätt kontrolleras så länge de fotografiska mätbilderna är i behåll. Direkta mätningar är i dylika fall ofta besvärliga och kan påverka föremålens lägen samt är svåra att kontrollera tillfredsställande. Ofta visar sig kompletteringar erforderliga, vilka kräver extra arbete, om de överhuvud taget låter sig göra.

Om våra viktigare kulturföremål fotograferas med mätkameror, vilket i och för sig är ett tämligen enkelt företag, och mätbilderna med tillhörande stödmätningar bevaras för framtiden på ett betryggande sätt, kan eftervärlden utan större besvär få noggranna och detaljerade uppgifter om föremålens geometriska förhållanden och därmed rekonstruera vad tidens tand eller eventuella atombomber förstört. Denna fotogrammetrins möjlighet, att dokumentariskt avbilda och med hög noggrannhet rekonstruera föremål och skeenden, borde få större praktisk tillämpning än hittills, inte minst med tanke på den framtida forskningen i olika avseenden.

Om man låter fantasien spela en smula finner man lätt en mångfald möjliga tillämpningar för fotogrammetrin utöver de nämnda exemplen. Åtskilliga användningsområden är tämligen väl genomforskade men många väntar på att uppmärksammas.

Litteratur: HALLERT: Fotogrammetri, Norstedts 1953.

Trianglar ABC med heltalssidor och given cos (B—A)

Av lektor Björn Svenonius, Borås

I en triangel ABC med rationella sidor gälla följande enkla, kända satser:

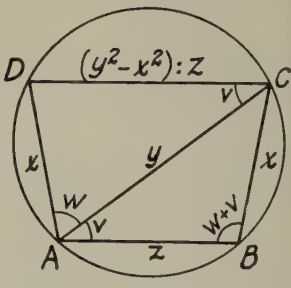
1. $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ äro rationella enligt cosinusteoremet.

2. $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ kunna skrivas $k_1\sqrt{H}$, $l_1\sqrt{H}$, $m_1\sqrt{H}$, där de rationella talen k_1, l_1, m_1 äro proportionella mot sidorna och $\sqrt{H}$ är det i allmänhet irrationella tal, som återstår av kvadratroten i Herons formel, när alla kvadratiska faktorer utflyttats. Efter lämplig förlängning kan H antagas vara ett naturligt tal. Om undantagsvis $H=1$, är ytan rationell och triangeln säges vara *heronsk*. Satsen är en omedelbar följd av ytteoremet.

3. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}B$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}C$ ha formen $k_2\sqrt{H}$, $l_2\sqrt{H}$, $m_2\sqrt{H}$ med rationella k_2, l_2, m_2, såsom följer ur identiteterna $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A=\sin A:(1+\cos A)$ etc.

4. $\cos(A-B)=\cos A\cos B+k_1l_1H$ är rationell. Följer ock ur figuren, som strax visas.

Vi söka nu omvänt bestämma en heltalstriangel ABC med vinklarna $A=v$, $B=v+w$, varvid alltså $\cos w=\cos(B-A)$ nödvändigt har ett rationellt värde, som vi tänka oss givet. I figuren drages kordan $CD \,||\, BA$ i den omskrivna cirkeln. Enligt Ptolemaios' sats t. ex. är ACD en triangel med rationella sidor och vinklarna $A=w$, $C=v$. Man kan då först bestämma en med ACD likformig *grundtriangel* $A_1C_1D_1\equiv$ $\equiv\triangle(a_1, b_1, c_1)$, där A_1D_1, A_1C_1, C_1D_1 betecknas a_1, b_1, c_1 respektive. Tillhörande $A_1B_1C_1$ har då $x_1=a_1$, $y_1=b_1$, $z_1=(b_1^2-a_1^2):c_1$ (Ptolemaios' sats) och ur denna fås lösningen $\triangle(x, y, z)$ efter multiplikation med c_1 eller någon faktor i c_1, om man vill ha en primitiv lösning, dvs. förbjuder gemensam faktor för x, y, z. Det är lätt att skissera en metod för bestämning av $A_1C_1D_1$. Ur $\cos w$ fås $\sin w$ och H; sedan införes $\operatorname{tg}\frac{1}{2}v=p\sqrt{H}:q$, där det rationella positiva talet p/q (fullständigt förkortat) väljes så att $0<\operatorname{tg} v<\cot\frac{1}{2}w$ för vinkelsummans skull i $\triangle(x, y, z)$. Detta villkor: $v<90°-\frac{1}{2}w$, ekvivalent med $b_1>a_1$, är strängare än $\frac{1}{2}v<90°-\frac{1}{2}w$,



som är villkoret för grundtriangelns existens. Ur $\operatorname{tg}\frac{1}{2}v$ fås $\sin v$, $\cos v$ och till sist $\sin(v+w)$, varpå $a_1=k\sin v$, $b_1=k\sin(v+w)$, $c_1=k\sin w$ vid lämpligt val av k är en lösning.

Enligt ett förslag av lektor A. Wahlgren bibehålles bråkformen för H i den allmänna diskussionen.

För

$$\cos w=\frac{r}{s}, \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w=\sqrt{\frac{s-r}{s+r}}=\frac{k_1\sqrt{H_1}}{k_2\sqrt{H_2}}$$

kan man sätta

$$2r=k_2^2H_2-k_1^2H_1, \qquad 2s=k_2^2H_2+k_1^2H_1 \tag{α}$$

varvid

$$\sin w=\frac{k_1k_2\sqrt{H_1H_2}}{s}.$$

Då r och s äro relativa primtal, kunna k_1H_1 och k_2H_2 ej ha någon annan gemensam faktor än ev. 2, nämligen då r och s båda äro udda. Varken k_1H_1 eller k_2H_2 ha därför någon faktor gemensam med r eller s.

På samma sätt fås för $(p, q)=1$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v=\frac{p}{q}\sqrt{\frac{H_1}{H_2}}, \qquad \cos v=\frac{q^2H_2-p^2H_1}{q^2H_2+p^2H_1}=\frac{m}{n}$$

så att man kan antaga

$$m=q^2H_2-p^2H_1, \qquad n=q^2H_2+p^2H_1 \tag{β}$$

där m och n icke ha någon udda gemensam faktor. Vidare

$$\sin v=\frac{2pq\sqrt{H_1H_2}}{n}, \qquad \sin(v+w)=\frac{\sqrt{H_1H_2}}{ns}(k_1k_2m+2pqr)$$

och

$$a_1:b_1:c_1=2pqs:(k_1k_2m+2pqr):k_1k_2n \tag{γ}$$

med möjlighetsvillkoret $\dfrac{q}{p}>\dfrac{k_1H_1+\sqrt{2sH_1}}{k_2H_2}$.

Med användning av (α) och (β) verifieras lätt följande formler

$$k_1k_2m+2pqr=(qk_1+pk_2)(qk_2H_2-pk_1H_1) \tag{δ}$$

$$H_2(qk_1+pk_2)(qk_1-pk_2)+2p^2s=k_1^2n \tag{ε}$$

$$k_1H_1(qk_1+pk_2)+k_2(qk_2H_2-pk_1H_1)=2qs \tag{ζ}$$

Om man nu sätter proportionalitetsfaktorn=1 i (γ), kunna a_1, b_1, c_1 divideras med gemensamma faktorer till

1) p och $k_1k_2H_2$ enl. (δ). 2) q och $k_1k_2H_1$ enl. (δ). 3) s och qk_1+pk_2 enl. (δ) och (ε); till följd av (ζ) ingår en sådan faktor även i $qk_2H_2-pk_1H_1$, så att b_1 innehåller dess kvadrat. 4) eventuellt med 2. 5) En udda gemensam primfaktor till $b_1^2-a_1^2$ och c_1, som ej är

gemensam för a_1, b_1, c_1, ingår i k_1k_2. Detta följer direkt av att

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}w = \sqrt{\frac{(c_1+b_1-a_1)(c_1-b_1+a_1)}{(a_1+b_1+c_1)(a_1+b_1-c_1)}} = \frac{k_1\sqrt{H_1}}{k_2\sqrt{H_2}}$$

emedan en dylik faktor tydligen kan utflyttas framför rotmärket.

Talet k_1k_2 är gemensam faktor till $b_1^2-a_1^2$ och c_1 men kan helt eller delvis vara gemensamt för a_1, b_1, c_1.

Denna utredning belyses med ett sifferexempel, varvid 1), 2), .., 5) hänföra sig till motsvarande moment i ovanstående stycke. Det valda exemplet behandlas också med en annan metod.

cos w=1:3

Här är $r=1$, $s=3$ och $\sqrt{s-r}:\sqrt{s+r}=\sqrt{2}:2$, varav $H_1=2$, $H_2=1$, $k_1=1$, $k_2=2$ och möjlighetsvillkoret $q>(1+\sqrt{3})p$. Efter utelämnande av faktorn 2 har man då att börja med

$$a_1=3pq, \quad b_1=q^2+pq-2p^2=(q-p)(q+2p)>0, \quad c_1=q^2+2p^2\ldots \qquad (1)$$

och någon gemensam faktor enligt 1) finnes ej, ty om $p\equiv 0$ (2), är $q\not\equiv 0$ (2) och c_1 är udda. Detta är även fallet då p och q bägge äro udda. Är åter q jämnt (och p följaktligen udda), fås enligt 2) efter division med 2 (en faktor 2 från början borta!) triangeln (a_1', b_1', c_1') med udda c_1'. Om sedan $p\equiv q\not\equiv 0$ (3), är a_1 (liksom a_1')$\not\equiv \not\equiv 0$ (9), medan b_1 och b_1' äro divisibla med 9, så att efter division med 3 enligt 3) i triangeln $(a_1\ b_1,\ c_1)$ eller (a_1', b_1', c_1') en $\triangle(a, b, c)$ erhålles med udda c. För $p\not\equiv q$ (3) är redan (a_1, b_1, c_1) eller (a_1', b_1', c_1') en grundtriangel. En udda primfaktor, som går upp i b^2-a^2 och c, finnes icke, ty den skulle enligt 5) gå upp i $k_1k_2=2$, och, då c är udda, duger ej heller 2. Alltså är

$$x=ac, \qquad y=bc, \qquad z=b^2-a^2 \qquad (2)$$

där $(a, b, c)=(a_1, b_1, c_1)$ eller fås ur (a_1, b_1, c_1) genom division med 2, 3 eller 6. Så är för

$p=1$, $q=5$:
$a_1=15$, $b_1=28$, $c_1=27$; $a=a_1$ etc.; $x=15\cdot 27$, $y=27\cdot 28$, $z=13\cdot 43$.

$p=1$, $q=6$:
$a_1=18$, $b_1=40$, $c_1=38$; $a=9$, $b=20$, $c=19$; $x=9\cdot 19$, $y=20\cdot 19$, $z=11\cdot 29$.

$p=1$, $q=7$:
$a_1=21$, $b_1=54$, $c_1=51$; $a=7$, $b=18$, $c=17$; $x=7\cdot 17$, $y=18\cdot 17$, $z=11\cdot 25$.

$p=1$, $q=10$:
$a_1=30$, $b_1=108$, $c_1=102$; $a=5$, $b=18$, $c=17$; $x=5\cdot 17$, $y=18\cdot 17$, $z=13\cdot 23$.

Enligt cosinusteoremet är i vårt fall

$$3c_1^2=3a_1^2+3b_1^2-2a_1b_1 \tag{3}$$

så att $\triangle(a, b, c)$ återfinnes bland heltalslösningarna till (3). Att lösa en dylik ekvation i hela tal är en klassisk diofantisk uppgift. En metod är följande. Då i (3) åtminstone ett av a_1, b_1 är delbart med 3, kunna vi tack vare symmetrien välja $a_1=3n$, varigenom (3) ersättes med

$$c_1^2=9n^2+b_1^2-2nb_1=8n^2+(b_1-n)^2 \tag{3'}$$

Om man här sätter

$$b_1-n+n\sqrt{-8}=k(q+p\sqrt{-2})^2, \quad b_1-n-n\sqrt{-8}=k(q-p\sqrt{-2})^2$$

fås efter vartannat

$$b_1-n=k(q^2-2p^2), \quad n=kpq, \quad b_1=k(q^2+pq-2p^2), \quad a_1=3kpq,$$
$$c_1^2=k^2(q^2+2p^2)^2, \quad c_1=k(q^2+2p^2)$$

som innefattar (1). Fogas härtill det system, där a_1 och b_1 bytt roller, får man den fullständiga lösningen till (3). Förf. kan ej här ingå på något bevis härför.

Utan att känna (1) kan man härleda vissa egenskaper hos $\triangle(a, b, c)$ och tillhörande $\triangle(x, y, z)$ (2). Man har nämligen

$$3c^2=3a^2+3b^2-2ab \tag{4}$$

och, då nu *ett* av a, b är delbart med 3, låt vara $a=3n$,

$$c^2=9n^2+b^2-2bn=8n^2+(b-n)^2 \tag{4'}$$

Om i stället $b\equiv 0$ (3), $a\not\equiv 0$ (3), *gäller det följande i alla fall. I* $\triangle(a, b, c)$ *och* $\triangle(x, y, z)$ *äro* a, b *av olika paritet, likaså* x, y. I fall a, b äro av olika paritet, är c udda (4) och saken klar. Vore a och b av samma paritet, måste de liksom n vara udda och c jämnt (4), så att (4') kunde skrivas

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2=2n^2+\left(\frac{b-n}{2}\right)^2$$

Men här har högra ledet ingendera av de former $4m$, $8m+1$ som tillkomma en heltalskvadrat, och antagandet är orimligt. *I* $\triangle(x, y, z)$ *är åtminstone ett av talen* x, y *delbart med* 9. För $a=3n$ har man två möjligheter. Den ena att i (4') $c^2\equiv b^2\equiv 1$ (3), då n är delbart med 3 och (a samt) x med 9, den andra att $c\equiv 0$ (3), då $x\equiv 0$ (9). *I* $\triangle(x, y, z)$ *är ett av talen* x, y, z *delbart med* 5.

Ur (4) fås för tillhörande $\triangle(a, b, c)$

$$c^2\equiv a^2+b^2+ab \tag{5}$$

varav framgår att endast ett av talen a, b kan vara multipel av 5 (eljest vore c det också). Tre fall måste undersökas.

A. $a \equiv 0$ (5), $b \not\equiv 0$ (5) eller tvärt om. Enligt (5) är $c \not\equiv 0$ (5) och, då $b^2 - a^2 \not\equiv 0$ (5), är x resp. y ensamt multipel av 5.

B. $a \not\equiv 0$ (5), $b \not\equiv 0$ (5), $b^2 \equiv a^2$ (5). Då är $c^2 \equiv a^2 \not\equiv 0$ (5), som hör till $a \equiv -b$ (5). Då 3 icke är kvadratisk 5-rest, utgår $b \equiv a$ (5) enl. (5). Endast $z \equiv 0$ (5).

C. $a \not\equiv 0$ (5), $b \not\equiv 0$ (5), $b^2 \not\equiv a^2$ (5). Här skulle, till följd av $a^4 \equiv b^4$ (5), $a^2 \equiv -b^2$ (5) och $c^2 \equiv ab \not\equiv 0$ (5), $c^4 \equiv a^2 b^2 \equiv -a^4$ (5), vilket är omöjligt. Detta fall uppträder aldrig.

$v = w < 30°$

Detta fall är av delvis annan natur.

Tillhörande $\triangle(x, y, z)$ har vinklarna w, $2w$, $180° - 3w$ och den likbenta grundtriangeln (a, b, a), där a och $b > a$ äro två godtyckliga rel. prima heltal. Härav direkt den primitiva triangeln

$$x = a^2, \quad y = ab, \quad z = b^2 - a^2$$

i vilken en eller två sidor äro udda. Ur Ptolemaios' sats fås sambandet $xz = y^2 - x^2$, som är karakteristiskt för *alla* trianglar med $B = 2A$, ty det innebär att $CD = x = DA$, dvs. $v = w$ [Elementa *9* (1925—26), 188]. Till samma resultat kommer man trigonometriskt. Ur $x : y : z = \sin w : \sin 2w : \sin 3w$ följer $x = k$, $y = 2k \cos w$, $z = k(4 \cos^2 w - 1)$, där k är kvadraten på hela (udda) eller halva (jämna) nämnaren i det slutförkortade rat. $\cos w$.

Man får $»p» = k(2 \cos w + 1) \cos w$, $T = k^2 \sin w \cos w (4 \cos^2 w - 1)$, $r = k \sin w (2 \cos w - 1)$, $r_y = k \sin w (2 \cos w + 1)$ och $h_z = 2k \sin w \cos w$.

Är till sist även $\sin w$ rationell, låt vara $\operatorname{tg} \frac{1}{2} w = e/f$, $\sin w = 2ef/(e^2 + f^2)$, $\cos w = (e^2 - f^2)/(e^2 + f^2)$, kan man efter ev. förkortning sätta $\sin w = s/N$, $\cos w = t/N$, $k = N^2$, ett udda tal. I en heronsk (primitiv) heltalstriangel $\triangle(x, y, z)$ med $B = 2A$ befinnes då genast T, p, r, r_y och h_z vara hela tal.

Till redaktionen av Elementa och till fil. dr J. Andersson, Vaxholm, vill förf. uttala ett varmt tack för givande diskussioner och bistånd i samband med föreliggande uppsats. I tacksamhetsskuld står förf. även till det intressanta arbetet av Victor Thébault: »Les récréations mathématiques», Gauthier-Villars, Paris 1951.

Fotografiska solförmörkelseobservationer med mindre instrument

Av observator Åke Wallenquist, Uppsala

Vid den totala solförmörkelsen den 30 juni i år går totalitetszonens nordlinje strax norr om följande orter: Åmål (ung. 11 km), Töreboda (5), Skänninge (6) och Överum (7) på fastlandet samt Klintehamn (4) på Gotland, medan sydlinjen går strax söder om följande orter: Kungälv (ung. 7 km), Svenljunga (2), genom Värnamo och Kosta (11) på fastlandet samt Mörbylånga (12) på Öland. Ett stort antal in- och utländska vetenskapliga expeditioner kommer att fatta posto på från väderlekssynpunkt lämpligt belägna platser nära förmörkelsens centrallinje mitt emellan de ovan angivna gränslinjerna.

För studiet av totala solförmörkelser erfordras i regel en mycket komplicerad och dyrbar instrumentutrustning. Emellertid är det även möjligt att med hjälp av mindre och billigare intrument utföra vetenskapligt värdefulla observationer. Här skall i största korthet några anvisningar ges för fotografiska observationer av solförmörkelsen med hjälp av amatörkameror, för vilkas utförande inte erfordras astronomisk fackkunskap.

Enär solbilden på plåten har en diameter som är ung. 1/100 av brännvidden, är det givetvis önskvärt, att den använda kamerans brännvidd inte är för liten eller att man vid *koronafotograferingen* har tillgång till ett teleobjektiv av något slag. Man kan med en mindre kamera och telelins erhålla utmärkta koronabilder, som framgår av fig. 1.

Kameran måste vara fast uppställd och lämpligen försedd med en enklare riktanordning, så att man under totaliteten lätt kan kontrollera och justera inställningen. Om man inte tar för långa exponeringar eller kameran har för lång brännvidd, behöver den inte vara parallaktiskt uppställd och försedd med urverk, utan den kan vara fix utan att man behöver riskera att bilden blir oskarp. För själva koronafotograferingen bör man använda någon finkornig och medelhastig plåtsort. Användes pankromatiska plåtar, bör man vid exponeringarna lämpligen betjäna sig av något färgfilter, blått, gult eller rött. Har man tillfälle att efter varandra ta en serie koronabilder genom olika färgfilter, kan man studera koronans utseende inom olika färgområden. Användes polaroidfilter, kan även *polarisationen* undersökas.

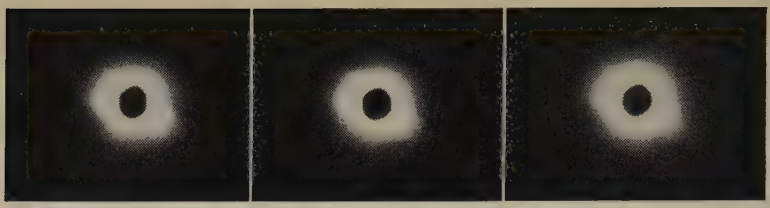


Fig. 1. Tre exponeringar av solkoronan upptagna vid den totala solförmörkelsen den 9 juli 1945 av fil. lic. Carl Reuterswärd, Uppsala, med en Tele-Tessar lins med 32 cm brännvidd på Agfa Isopan film. Bländaröppningen var ca $^1/_{10}$ och exponeringstiden någon sekund.

Frågan om den lämpliga bländaröppningen och exponeringstiden, hänger intimt samman med plåtsorten och de använda filtren, varför några bestämda uppgifter på exponeringstiden inte kan ges. Det lämpligaste är, att man själv söker experimentera sig fram genom att fotografera fullmånen, som har ungefär samma ljusstyrka som koronan. Intensitetsfallet inom koronan från solkanten utåt sker mycket hastigt, varför man inte kan förvänta sig att i en exponering kunna fotografera både den yttre och inre koronan. Den inre koronan kan man i regel erhålla med en exponeringstid på någon bråkdels eller någon sekund och liten öppning, medan den yttre framträder vid en exponeringstid på några sekunder eller något tiotal sekunder beroende på öppningsförhållande, filter och plåtkänslighet. Det lämpligaste är, att man under totaliteten tar en serie bilder av koronan med växande exponeringstider på olika plåtar. På grund av den stundande förmörkelsens längd (ca $2\,^1/_2$ min.) hinner man växla kassetter och ta flera plåtar. Man bör noggrant notera tidpunkten för exponeringens början samt exponeringstidens längd för varje plåt och sörja för, att man har tillgång till ett tillförlitligt ur och rätt tid.

Har man möjligheter, kan man även göra försök med *färgfotografering av koronan.* Användes Kodachrome Daylight, bör man med f/5,6 och $^1/_{30}$ sek. kunna erhålla fotografier av protuberanserna, med f/10 och 1 sekund bilder av den inre och med f/3,5 och 4 sek. av den yttre koronan.

För studiet av koronans allmänna form och koronastrålarnas utseende är det lämpligt att ha tagit en serie bilder av koronan med växande exponeringstider. Genom superponering av flera sådana koronafotografier kan man på kopiorna få fram svaga detaljer inom koronastrukturen och koronastrålarna med ökad skärpa.

Vill man nu gå ett steg längre och på grundvalen av koronafotografierna söka få fram en bild av den *relativa ljusfördelningen*

inom koronan (i en eller flera färger), måste man söka konstruera *isofoter* eller kurvor, som sammanbinder punkter med samma svärtning eller ljusintensitet inom koronan. Detta kan ske t. ex. på något av följande enkla sätt.

Har man tillgång till en serie koronafotografier med växande exponeringstider (t. ex. växande i geometrisk progression), granskar man bilderna en för en mot bakgrunden av en likformigt belyst yta av opalglas. Därefter drar man upp gränskonturen för den svagast skönjbara svärtningen på plåten. Varje exponering ger då en isofot, som svarar mot en bestämd ytljusstyrka, och alla isofoterna inlagda på samma karta ger en mycket åskådlig bild av den relativa ljusfördelningen inom koronan.

Har man endast tillgång till en eller ett par exponeringar av koronan, kan isofoter härledas med hjälp av en kopieringsmetod. Man kopierar koronan (eller helst en förstorad bild av koronan) med växande exponeringstider på ett hårt, kontrastrikt kopiepapper. På kopiorna fastlägger man sedan gränsen mellan svart och vitt eller gråvitt och uppdrar därefter konturen för den svagast skönjbara svärtningen. Varje kopia ger en isofot och alla kopiorna tillsammans ger en serie isofoter, som åskådliggör den relativa ljusfördelningen inom koronan. I figur 2 återges som illustration till detta tillvägagångssätt några serieexponerade kopior av en koronaplåt, som togs av den uppsaliensiska solförmörkelseexpeditionen till Bjuröklubb 1945, och därur härledda isofoter.

Härledningen av den absoluta ljusfördelningen inom koronan är ett betydligt svårare problem, som här måste förbigås.

Önskar man fotografera den *partiella fasen*, måste man blända ned kameran mycket starkt och dessutom använda ett mörkt gul- eller rödfilter och långsamma plåtar (t. ex. diapositivplåtar). Man kan därvid lämpligen ta en serie bilder på samma plåt med fast uppställd kamera. Tar man en exponering var 5—6 minut, erhåller man en serie väl åtskilda bilder av den partiella fasen. Det lämpligaste valet av filter, plåtsort, exponeringstid etc. kan man experimentera sig fram till genom direktfotografering av solen.

Önskar man *filma förmörkelsens* hela förlopp, måste man ordna observationerna så, att man under den partiella fasen kan kraftigt försvaga solbilden med hjälp av ett mörkt neutralfilter e. d., vilket kan avlägsnas under totaliteten, då man bör använda full öppning, så att koronan kan fotograferas. Under den partiella fasen exponeras solen under några sekunder med ett tidsintervall på någon minut. Kameran måste förses med lämplig syftanordning, så att man exakt kan centrera solbilden i filmrutan vid varje exponering.

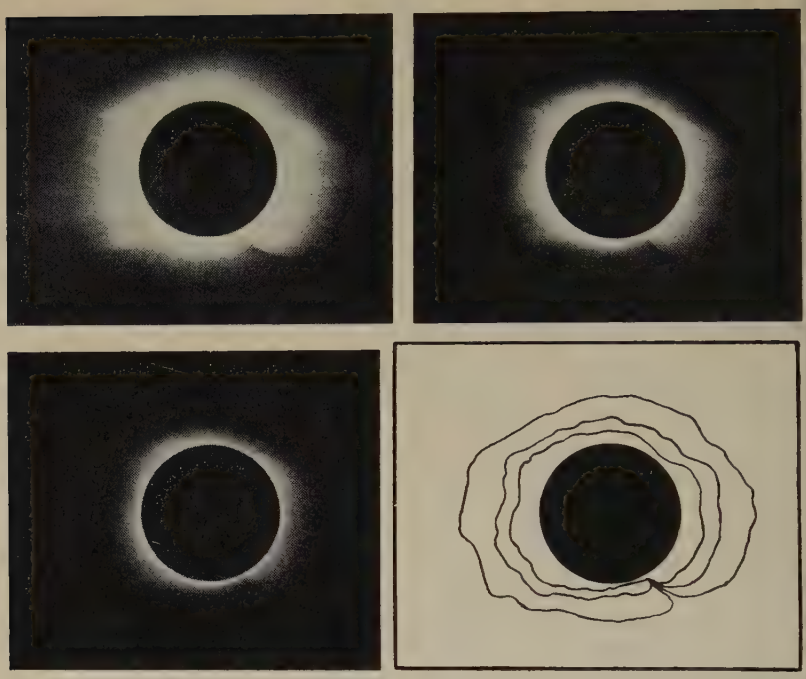


Fig. 2. Tre kopior med växande exponeringstider av ett koronafotografi taget av den Uppsaliensiska solförmörkelseexpeditionen till Bjuröklubb den 9 juli 1945 och de därur härledda isofoterna.

En solförmörkelse har inte endast astronomiskt utan även ett stort geodetiskt intresse, och ett omfattande geodetiskt program har även utarbetats för sommarens totala solförmörkelse.

Ett problem som i detta sammanhang har stort intresse, även ur rent astronomisk synpunkt, är *bestämningen av det noggranna läget av totalitetszonen.*

En noggrann lägesbestämning av skuggans väg över jordytan kan ske genom en serie observationer från platser i närheten av totalitetsbältets gränser. Observationerna består i en direkt kinematografisk upptagning av förmörkelseförloppet, kombinerad med sådan tidsregistrering att totalitetens längd ur filmen kan bestämmas på $0{,}1$—$0{,}2$ sek. när. För observationerna kan användas en 8 mm smalfilmkamera med 36 mm brännvidd, men observationernas värde ökas, om kameran kan kombineras med ett enkelt teleskop. Tidsregistre-

ringen kan lösas på olika sätt, t. ex. genom att samtidigt med filmningen på filmen uppta ljusblinkar, reglerade av ett ur, eller genom samtidig registrering på kronograf, bandspelare eller på annat sätt av impulserna från ett ur och från kamerans exponeringar. Någon absolut tidsbestämning behövs inte, varför radiosignalmottagning inte ifrågakommer.

För att bästa möjliga resultat skall kunna uppnås måste dessa observationer samordnas beträffande val av lämplig observationsort etc. Den som är intresserad att deltaga bör därför lämpligen ta kontakt med professor Lars Asplund, Rikets allmänna kartverk, Stockholm 8, som också gärna lämnar de övriga upplysningar som önskas.

I samband med solförmörkelser uppträder allahanda sekundära fenomen, som vi kan studera direkt på jordytan. Ett dylikt är uppträdandet av »flygande skuggor» eller »skuggband», som man kan iakttaga på en vit mur eller ett vitt lakan i det ögonblick solen nästan är totalförmörkad.

Skuggbanden är approximativt parallella med tangenten till solskärans centrum, och deras bredd uppgår till några cm eller dm, medan avståndet mellan dem uppgår till några dm eller något tiotal dm. Avstånden mellan banden är genomgående större än bandbredden. Banden rör sig vinkelrätt mot sin längdriktning och med hastigheter, som uppgår till några m/sek. Man kan ofta börja iakttaga de flygande skuggorna flera minuter innan själva totaliteten inträtt. Likaså uppträder fenomenet omedelbart efter totalitetens slut.

Dessa flygande skuggor ger en mycket egendomligt mystisk stämning åt landskapet, när de hastigt fladdrar förbi över marken, då mörkret redan blivit påfallande och bidrager i hög grad till den overkligt dystra stämning, som är så karakteristisk för totala solförmörkelser.

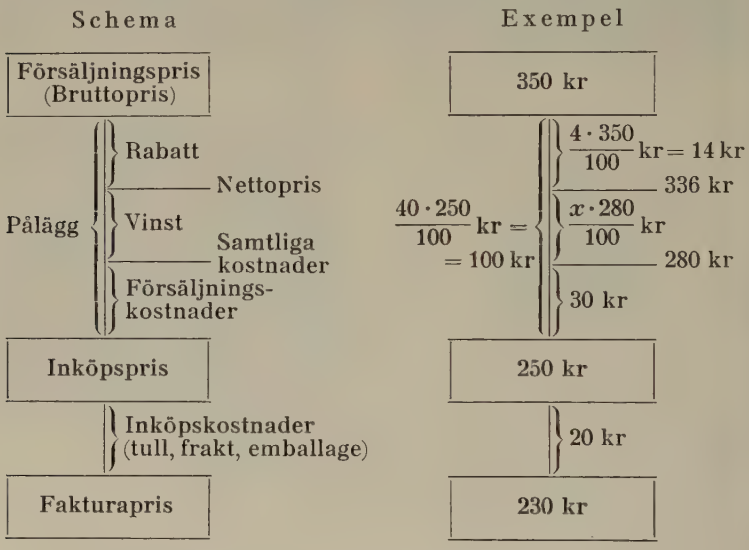
Har man tillgång till en ljusstark filmkamera kan man göra försök med att filma skuggbanden. Man placerar då på lämpligt avstånd en vitmålad skärm ungefär vinkelrätt mot solstrålarna och riktar kameran mot denna (skärmens orientering måste vara noggrant känd). När skuggorna börjar synas, startar man filmningen och noterar tiden. Ur filmremsans hastighet, kan man genom att räkna antalet filmrutor mellan skuggornas förskjutning över skärmen bestämma deras hastighet. Med skärmens dimensioner som mått kan skuggbandens bredd och avståndet mellan dem härledas ur mätningar på filmen.

De flygande skuggorna är rent atmosfäriska företeelser och beror på oregelbundenheter i atmosfärens optiska täthet, som särdeles tydligt framträder i ljuset av den smala, nästan linjeformade ljuskälla, som solskäran utgör strax före totaliteten.

Schema för problem gällande inköps- och försäljningspriser m. m.

Av läroverksadjunkt Arne Elfving, Stockholm

I Elementa 1950: 1 s. 37 är ett »schema över fakturapris» infört. Vid min undervisning använder jag mig i stället av följande schema.



Genom att från en ruta gå *uppåt* och varje gång *addera* de olika priserna erhållas bl. a. följande samband:

fakturapris + inköpskostnader = inköpspris
inköpspris + pålägg = försäljningspris (bruttopris)
pålägg = försäljningskostnader + vinst + rabatt
fakturapris + inköpskostnader + försäljningskostnader = samtliga kostnader

Genom att från en ruta gå *nedåt* och varje gång *subtrahera* de olika priserna erhållas bl. a. följande samband:

bruttopris − rabatt = nettopris
försäljningspris − pålägg = inköpspris

Vid lösandet av problem av detta slag låter jag eleverna rita upp ett schema och fylla i respektive rutor och sträckor med sifferuppgifter,

som erhållas ur texten. Därefter är det inte någon svårighet för dem att ställa upp ekvationen.

Exempel: En affärsman köper en vara, vars fakturapris är 230 kr. Kostnaderna för frakt uppgick till 20 kr. Hans utgifter för lager- och lokalhyra beräknade han till 30 kr. Hur stor blir hans vinst uttryckt i procent av samtliga kostnader för varan, om han säljer den med 40 % pålägg och lämnar vid försäljningen 4 % rabatt?

Antag: Vinsten utgör x % av samtliga kostnader.

Ekv.: $\frac{x \cdot 280}{100} = 56$; $x = 20$. Svar: Vinsten utgör 20 % av samtliga kostnader.

Ny giv för fysikaliska demonstrationer

Av lektor Eve Staffansson, Göteborg

Litteraturen över fysikaliska demonstrationer är för närvarande rätt rikhaltig, åtminstone för gymnasie- och högskolestadium. För realskolan och dess presumtive arvtagare, evad det gäller kunskapsnivån (!), där den experimentella delen av fysikundervisningen måste tillmätas minst lika stor vikt, begränsar elevernas kunskapsområde lärarens experimentella arbetsfält så snävt, att för lärare med traditionell akademisk utbildning behovet av en speciell handledningslitteratur ej är lika starkt framträdande som för ett högre stadium. På detta lägre stadium har ju dessutom på sistone den s. k. »lådfysiken» med sina »bruksanvisningar» vunnit en viss utbredning, en utvecklingsform av den experimentella undervisningen, som i varje fall på ett högre stadium kan medföra en mindre lyckad uniformitet med hämmande återverkan på den initiativ- och idérike läraren.

Hithörande litteratur kan schematiskt indelas i tvenne grupper: den som lägger huvudvikten vid angivandet av ett försöks alla kvantitativa data och den som beskriver ett experiment men därjämte lämnar något av den teoretiska bakgrunden och därigenom placerar försöket på dess plats i den fysikaliska lärogången, en framställning, som bringar i erinran experimentalfysikens läroböcker. Härtill kommer så litteraturen av mera firmabundet ursprung samt slutligen den rikhaltiga floran av fysikaliska tidskrifter, som ständigt producerar nya, mer eller mindre originella bidrag till elementär experimentalfysik.

Till den första typen räknas de kända verken av Calthrop, Daniel, Friedrich-Kröncke, Kröncke, Gronau, Ingersoll-Martin, Nokes, Sutton, Weinhold och Wulff, till den andra Pohls tre berömda böcker, arbeten av Bergmann-Schaefer, Eder, Frauenfeld-Huber, Greinacher och Schnippenkötter för att nämna några.

Den firmabundna litteraturen leder sitt ursprung från Zeisswerkens ingående instruktioner till den experimentella demonstrationsutrustningen i optik och där utvecklingen förts vidare av i främsta ledet Phywe och Spindler-Hoyer i Göttingen, Cenco i USA och senast Leybold i Köln. Phywes handledningar, Physik in Versuchen, utgör således en fortsättning och utvidgning av Roller-Pricks tidigare arbeten. Gemensamt för praktiskt taget all denna litteratur har hittills varit den klassiska men mången gång mindre ändamålsenliga dispositionen i mekanik, akustik, värmelära, elektricitetslära och optik. Den moderna fysikens utveckling och många tillämpningar har skapat områden, som ej följdriktigt låter sig inrangeras i denna indelning. Men traditionens makt har varit och är stor, och först på senaste tiden har man iakttagit ansatser till en mera ändamålsenlig indelning av det fysikaliska vetandet (ex.: den under omarbetning varande Schnippenkötters bok eller Weizels Lehrbuch der theoretischen Physik i två band, Physik der Vorgänge och Struktur der Materie).

I de nu föreliggande delarna av *Leybolds Physikalische Handblätter* (1. Folge, 1954, 72 blad), som utarbetas under ledning av *dr Karl Hecht,* välkänd här från åtskilliga förnämliga demonstrationer, har man slagit in på en ny väg, i viss mån en kompromiss mellan den klassiska indelningen och kravet på en nyordning. Som indelningsgrund ligger den internationella decimalklassifikationen, där avdelning 5 upptar matematik och naturvetenskap med fysik under rubrik 53 med tillhörande 10 avdelningar (530, 531, . . ., 539) och där de 9 första närmast ansluter sig till »Physik der Vorgänge» och det sista till »Struktur der Materia». Denna disposition ger åt verket en logisk uppdelning med stor expansionsmöjlighet och erbjuder väsentliga fördelar vid den praktiska användningen i lärosal och laboratorium.

När arbetet föreligger i fullständig form torde det komma att överspänna större delen av den demonstrativa experimentalfysiken, som faller inom gymnasie-, högskole- och universitetskursernas ram, där även försök från detta senare stadium med vissa förenklingar lätt transponeras till lika värdefulla försök på något lägre stadium. Särskilt för de högre tekniska läroverken med möjlighet att i fysikundervisningen dra fördel av differential- och integralkalkylen kommer ett sådant verk att vara av bestående värde.

Denna handbok i lösbladssystem intar i flera avseenden en särställning. Till varje försök finns sålunda litteraturanvisning, i allmänhet

till Pohls och Bergmann-Schaefers böcker, och därjämte ges under »Prinzip» en kort men ingående behandling av det teoretiska underlaget (vanligen en sida av A4-format) till experimentet, något som föredömligt skiljer detta verk från många andra; därefter följer en sammanställning av erforderlig materiel, ett fotografi av en pedagogiskt lämplig uppställning, ett kopplingsschema med anvisningar till försökets genomförande samt i flera fall försöksresultat i tabell- eller kurvform och slutligen plats för egna anteckningar.

Experimenten genomföres i största möjliga utsträckning kvantitativt och förutsätter moderna hjälpmedel. »Aufbauprincipen» tillämpas med kritiskt omdöme. Knappast något försök kräver annan spänning än 220 V växelspänning. Spänningar av annat belopp eller annan art erhålles bekvämt med strömriktare och experimenttransformator eller en hopbyggd mindre enhet av dessa komponenter. Har även hos oss de ur kostnads-, arbets- och pedagogisk synpunkt dubiösa fasta kopplingstavlorna i lärosalarna spelat ut sin roll? Verket är rikt på nya idéer, nya eller förbättrade apparater och försök. Atwoods fallmaskin är här ej längre dynamikens välsignade universalmaskin. Hela såväl kinematikens som kinetikens experimentella underlag är sammankopplat med problemet om noggrann tidmätning. Här begagnas ett nykonstruerat elektriskt synkronstoppur med visaravläsning på 0,01 sek, och med en roterande skiva med millisekundgraderat papper avläses på någon tiondels millisek. Accelerationen vid fritt fall bestämmes ur ett fritt-fall-försök för att nämna ett exempel. Det är uppenbart, att ett sådant ur begagnas i flerfaldiga försök inom vågrörelselären, akustiken och elektricitetsläran. I de nu föreliggande bladen fäster man sig kanske särskilt vid den utvidgning som berör elektriska svängningar av olika slag och elektromagnetiska cm-vågor, emitterade från ett gnistgap i hålrumsresonator, en ur pedagogisk synpunkt utmärkt reproduktion av de klassiska herzska försöken på reflexion, refraktion, polarisation interferens m. m. Det saknas i dessa första blad ej heller eleganta och instruktiva försök från svängningslärans vittutgrenade fält.

Med kännedom om firmans aktuella tillverkning och det intresse med vilket utvecklingarbetet bedrives har vi att emotse ett verk, som i fullständigt skick kommer att uppvisa ett betydande antal nya experiment även från sådana områden som hittils nästan helt saknat experimentell belysning. En icke oväsentlig förtjänst ligger i den praktiska och gedigna utformningen, en betydelsefull detalj för ett arbete av handbokskaraktär i daglig användning.

Notiser

Tredjegradsekvationen på gymnasiet

Lösningen till den allmänna tredjegradsekvationen kan härledas med i realgymnasiets allmänna kurs ingående element. Ekvationen kan alltid skrivas under formen $x^3-3ax-2b=0$. Man kan genom att studera skärningarna mellan kurvan $y=x^3$ och räta linjen $y=3ax+2b$ för olika värden på a och b erhålla sambandet mellan koefficienterna a och b och antalet reella rötter. Gränslägena för tre reella rötter bestämmes av de två tangenter till $y=x^3$, som har vinkelkoefficienten $3a$. Man kan också studera kurvan $y=x^3-3ax-2b$. Tre reella rötter erhålles, om denna har ett positivt maximum och ett negativt minimum eller om ettdera värdet är $=0$, då två rötter blir lika. Sammanfattningsvis finner man för $b^2-a^3>0$ en reell rot, för $b^2-a^3<0$ tre olika reella rötter och för $b^2-a^3=0$ en dubbelrot. Tre reella rötter fordrar vidare $a>0$.

Detta resultat kan användas för en härledning av parabelns evoluta, som i en del läroböcker meddelas utan bevis. Evolutan definieras då som orten för punkter, varifrån endast två olika normaler kan dragas till en parabel. Därefter visas att varje parabelnormal är en tangent till evolutan.

Vid lösning av en ekvation med en reell rot användes Cardanos formel, som lätt kan härledas elementärt (se t. ex. C. F. Lundahl, Ekvationsteori, Stockholm 1933). I fallet tre reella rötter kan lösningen härledas trigonometriskt genom substitutionen $x=z\cos v$, som ger

$$4\cos^3 v-\frac{12a}{z^2}\cos v=\frac{8b}{z^3}$$

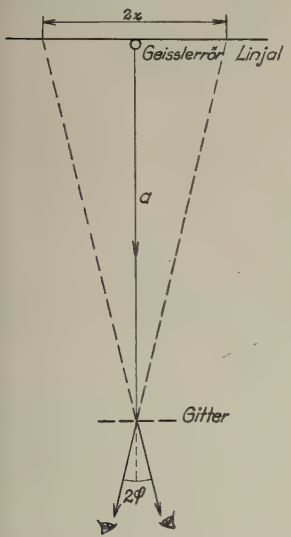
För att kunna använda formeln $\cos 3v=4\cos^3 v-3\cos v$ väljes $z=2\sqrt{a}$, varvid erhålles $\cos 3v=b:a\sqrt{a}$. Då $b^2-a^3<0$, gäller $|\cos 3v|<1$. Man erhåller vidare $3v=\pm a+n\cdot 360°$ och $v=\pm\frac{1}{3}a+n\cdot 120°$. De mot vinklarna v svarande punkterna på den trigonometriska enhetscirkeln är hörn i två liksidiga trianglar, som övergår i varandra genom vridning omkring x-axeln. Om värdena på v insättes i $x=2\sqrt{a}\cos v$, erhålles därför tre men ej fler värden på x. — Jfr Sjöstedt, Formelsamling och uppg. 7, reallinjen, v. t. 1944.

Gösta Wranglén

Våglängdsbestämning utan spektrometer

En enkel metod för bestämning av ljusvåglängder med transmissionsgitter finns utförligt beskriven i WESTPHALS bok *Physikalisches Praktikum*. Samma metod beskrevs redan 1928 i Elementa *11*, 232 av K. A. WINGÅRDH och är antydd i ett par övningsexempel i BERGHOLMS lärobok i fysik men förefaller inte vara allmänt brukad, varför den här aktualiseras.

Gittret, ett geisslerrör och en linjal anordnas som figuren visar. Om man ser genom gittret, synes spektra avteckna sig mot linjalen på ömse sidor om normalen. Anordningen tjänstgör som en gitterspektrometer, i det att geisslerrörets kapillärdel verkar som spalt och observartörens öga som kikare. Om avståndet a är tillräckligt stort (1 m är lagom för vanliga skolgitter) kan ljuset som träffar gittret anses nöjaktigt parallellt, varför kollimatorlins kan undvaras.



I de flesta fall kan man ha sådan belysning i rummet, att linjernas lägen på skalan kan avläsas direkt. Är linjerna så svaga, att man måste ha mörkt i rummet för att kunna observera dem, kan man låta en medhjälpare förskjuta ett index (t. ex. en koppartråd) på linjalen, till dess att linjen synes falla på detta (koppartråden syns bra i ljuset från geisslerröret), och avläsning sker sedan ljuset tänts. Mätningarna av $2x$ och a, som kan göras på någon mm när, ger böjningsvinkeln φ, varefter våglängden fås ur gitterekvationen.

Utom för våglängdsbestämning vid lektioner och laborationer lämpar sig anordningen väl för demonstration av olika geisslerrörs spektra. En iakttagare får genast en klar bild av hela spektrum, varför en klass mycket snabbare passerar en sådan uppställning än en anordning med skolspektrometer.

En modifierad anordning med spalt, således användbar för vilken typ av ljuskälla som helst, återfinnes i den amerikanska firman CENCO:s gitterspektrograf för skolbruk.

V. Hugo Sanner

Astronomiska bilder tillverkade av lysfärg

Den i Elementa *36* (1953), 43 omnämnda lysplasten och lysfärgen kan med fördel användas för tillverkning av astronomiska bilder. På glasskivor (vanligt fönsterglas 30 · 24 cm) uppklistras små runda plattor av lysplast, så att de inta samma läge i förhållande till varandra som stjärnorna i en stjärnkonstellation. Med hålstans (inköpes i en järnaffär) eller korkborr utstansas plattor med 8, 7, 6, 5, 4, 3 mm diameter, motsvarande stjärnmagnituderna 0, 1, 2, 3, 4, 5 resp. Om lysplast av olika färg användes, kan samtidigt stjärnornas färg demonstreras.

Den mytiska bild, i vilken stjärngruppen ingår, målas med lysfärg med hjälp av en vattenfärgpensel (nr 1). För att erhålla jämntjocka linjer med skarpa kanter kan man använda en kniv eller ett rakblad. Genom att belysa med en ficklampa, först de utstansade plattorna och sedan de målade linjerna, får man stjärnkonstellationen att framträda först och sedan den mytiska bilden. I ett mörkt rum synes inte glasskivan.

Arne Elfving

Uppgift 1 i studentexamen, specialkurs, mars 1954

För att lösa denna uppgift behöver man endast veta, att en parameterkorda är vinkelrät mot den ena av hyperbelns symmetriaxlar, ifall man, utom vissa hyperbelns symmetrier, förutsätter den klassiska egenskapen hos hyperbeltangenten att dess kontaktpunkt delar det mellan asymptoterna liggande segmentet mitt itu (vilket är ekvivalent med att tangent och asymptoter avgränsa en triangel med konstant yta). Man kan nämligen välja den symmetriaxel mot vilken en sådan korda, PP', är vinkelrät till x-axel, den andra till y-axel i ett rätvinkligt koordinatsystem. Skära då tangenterna i P och P' den ena asymptoten i A och A', den andra i B och B' resp., ligga A' och B (liksom A och B') symmetriskt i förhållande till x-axeln, så att, enligt anförda sats,

$$y_A - y_{A'} = y_A + y_B = 2y_P$$

vilket är uppgiftens innebörd, när PP' är en parameter.

Denna relation fortfar att gälla för en godtycklig korda PP', om an väljer dess diameter till x-axel och konjugatdiametern till y-axel ett i allmänhet snedvinkligt system, eftersom även här, med samma teckningar för övrigt, $A'B$ och AB' äro paralleller med PP' och axeln samt halveras av x-axeln (F. Carlson, Geometri I, ex. 273). änker man sig två vinkelräta plan, ett genom vardera diametern, erföres f. ö. detta fall vid figurens rätvinkliga projektion i ett mot båda förstnämnda vinkelrätt plan direkt på det redan behandlade.

Josef Andersson

ppg. 3 i studentexamen, specialkurs, mars 1954

Det skall visas, att om $y=\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$, så gäller ekv. $\frac{d^2y}{dx^2}+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$.

äroverksadjunkt Helge Almgren, Ludvika, har lämnat följ. bevis.

an har $y=\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\frac{T}{N}$, där $T'=-N$ och $N'=T$.

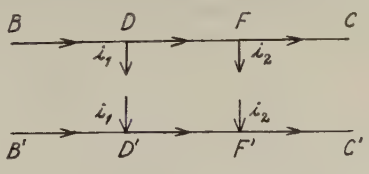
ltså är $$\frac{dy}{dx}+y^2=\frac{NT'-TN'}{N^2}+\frac{T^2}{N^2}=\frac{-N^2-T^2+T^2}{N^2}=-1$$

ch $$\frac{d^2y}{dx^2}+2y\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}+y^2\right)=0$$

fysikalisk studentuppgift från 1944. Ett beriktigande

Uppgift 7, nov. 1944 hade följande lydelse: »En elektrisk kraftledning för likström består av två jämsides lagda kopparledare, vardera ed 35 mm² tvärsnittsyta. På två ställen B och C på ledningssträckan, elägna 300 m från varandra, hålles spänningen mellan de båda ledngarna konstant vid 220 V, och på två ställen mellan B och C utges ström. Vid det ena strömuttagningsstället (D), som ligger 100 m ån B, uttages 50 A mellan ledningarna, och vid det andra (F), som gger 100 m från C, 30 A. Hur stor är spänningen mellan de båda opparledningarna vid strömuttagningsställena? Kopparns specifika dningsmotstånd är 0,0175.

Det i Elementa i 27 (1944), 252 lämnade svaret ($215\frac{2}{3}$ V vid D och $6\frac{1}{3}$ V vid F) är rätt men ej anvisningen för behandlingen. Först elt nyligen riktade lektor Josef ndersson min uppmärksamhet här-å, vilket jag tacksamt noterar.



Uppgiften kan generaliserad lösas ex. på följande sätt. Om de i fig. ngivna bokstäverna betecknar po-

tentialerna i resp. punkter och U_C, U_D, U_F och U_C betyder spänningarna i B, D, F och C, r resistansen i 100 m ledning och i_1 och i_2 strömstyrkorna vid uttagningsställena, erhålles $(B-D):r-(D-F):r=i_1$ och $(D'-F'):r-(B'-D'):r=i_1$, varav genom addition $(B-B')-2(D-D')+(F-F')=2ri_1$, dvs. $U_B-2U_D+U_F=2ri_1$ (1). På samma sätt får man $U_C-2U_F+U_D=2ri_2$ (2). Av (1) och (2) erhålles

$$3U_D = 2U_B + U_C - 2r(2i_1 + i_2)$$
$$3U_F = U_B + 2U_C - 2r(i_1 + 2i_2)$$

Enl. uppgiften är $U_B=U_C=220$ V, $i_1=50$ A, $i_2=30$ A, $r=0{,}05$ ohm, varav $U_D=215\frac{2}{3}$ V och $U_F=216\frac{1}{3}$ V.

Denna allmänna lösning anföres, därför att av den framgår tydligt hur spänningarna i D och F beror av spänningarna i B och C, av resistansen och av storleken av strömuttagen.

Enklast löses uppgiften så, att man t. ex. med I och I' betecknar strömstyrkorna i BD och $B'D'$, varav enl. uppgiften följer uttrycken för strömstyrkorna i övriga delar av ledningen. Gör man sedan en »potentialvandring» $B'BCC'B'$, erhålles en ekv., som ger $I-I'=263/3$. Man får sedan $U_D=220-r(I-I')$ osv.; $I-I'$ är strömmarnas algebraiska summa. Det bör framhållas, att de i fig. angivna strömriktningarna i BC och $B'C'$ ej är de verkliga riktningarna. Dessa behöver ej närmare utredas.

I Elementas anvisning behandlades endast ett specialfall, det då potentialerna i B och C är 220 V och i B' och C' 0 V. — Dylika oberättigade inskränkningar förekom i tre under 1940-talet utgivna svenska exempelsamlingar, vilket gör det så mycket angelägnare att här påpeka saken.

C. E. Blom

Uppgift 6 i studentexamen, specialkurs, jan. 1953

Det skall visas, att $\frac{1}{3}(2\sin x+\operatorname{tg} x)>x>\sin x$ för $0<x<\frac{1}{2}\pi$. Om man utgår från serien

$$x=\arcsin y=y\sum_0^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{(-y^2)^n}{2n+1}$$

erhålles till en början $x>y=\sin x$. Om man vidare utbyter $2n+1$ mot 3 i alla termer utom den första, som skrives $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$, erhålles

$$x<y\left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}\sum_0^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-y^2)^n=\tfrac{2}{3}y+\tfrac{1}{3}y(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}=\tfrac{2}{3}\sin x+\tfrac{1}{3}\operatorname{tg} x.\right.$$

Nils Juringius

PLAN GEOMETRI

av Carl Hyltén-Cavallius och Lennart Sandgren

293 sidor, format 15x23 cm. Pris 21 kronor i klotband.

Den nya läroboken innehåller den plana geometri, som vid universitet och högskolor ingår i fordringarna för ett och två betyg i fil. kand.- och ämbetsexamen. Den bygger på föreläsningar, som författarna, biträdande lärare i matematik vid Lunds universitet, hållit åren 1947—1953, och användes som kursbok i Uppsala, Stockholm och Lund.

Typografin är lättöverskådlig, och framställningen illustreras av inte mindre än 270 tydliga figurer. Till texten har fogats närmare 100 fullständigt lösta exempel och dessutom 500 övningar.

Boken innehåller mycket, som direkt belyser skolans geometrikurs, och framställningen är sådan, att en intresserad gymnasiestuderande kan läsa dessa partier separat och t. ex. därur hämta många uppslag till enkla och eleganta lösningar av geometriproblem.

De tolv kapitlen har dessa rubriker:

1. Vektorer. 2. Parallellkoordinatsystemet och räta linjen. 3. Skalär produkt och rätvinkliga koordinater. 4. Koordinattransformationer. 5. Likställighet, triangelgeometri och harmonisk delning. 6. Cirkeln. 7. Lineära avbildningar. 8. Syntetisk kägelsnittsgeometri. 9. Analytisk kägelsnittsgeometri. 10. Speciella egenskaper hos ellips, hyperbel och parabel. 11. Homogena koordinater. 12. Kägelsnitten från projektiv synpunkt.

Boken kostar kr 21:— mot postförskott och kan rekvireras från

HERMODS Slottsgatan 24 Malmö

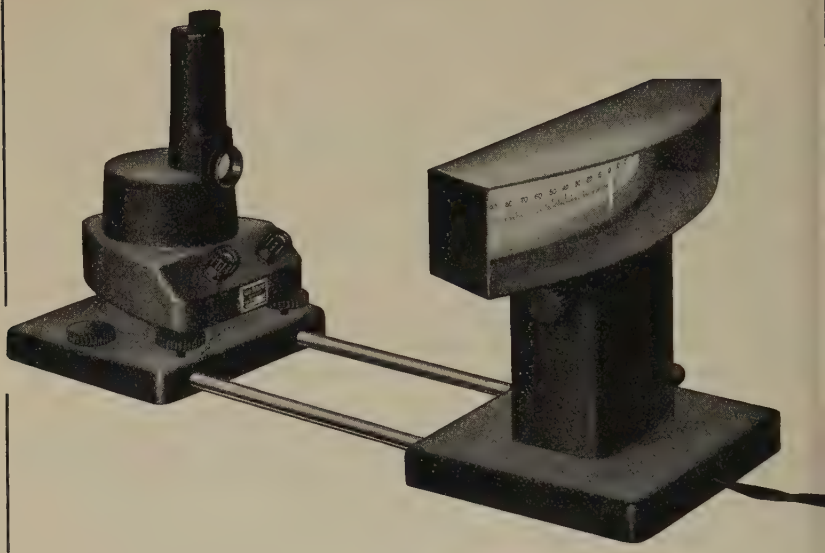
PEDAGOGISK SKRIFTSERIE

utgiven av

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning

1. **Elementär elektroteknik med laborationer**
   Av lektor *Gösta W. Funke*. Slutsåld
2. och 3. Båda dessa delar (stencilerade) är slutsålda
4. **Den kinematografiska filmen**
   Av professor *Helmer Bäckström*. 48 s. Nedsatt pris kr. 1:—
5. **Demonstrationer och laborationer i kemi. Demonstrationer och laborationer i fysik. Modern auxinforskning**
   Innehåll: 9 kemiska och 8 fysiska uppsatser jämte ett kapitel om modern auxinforskning, författat av docent *Georg Borgström*. 64 s. Pris kr. 3:—
6. **Statens institut för folkhälsan**
   Skriften innehåller även analysbeskrivning (laborationsförsök). 64 s. Pris kr. 3:50
7. **Fysikalisk problemsamling** (Under utgivning)
   Skriften är avsedd endast för lärare. 32 s. Pris kr. 2:—

Samtliga skrifter rekvireras direkt från Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning. **Adress: Lektor Bror Gustaver, Nyodlingsvägen 7, Bromma. Postgiro 85825.**



Spegelgalvanometer

med belysningsanordning och skala. Galvanometern kan levereras med olika inre motstånd och känslighet. Finnes även i utförande för ballistiska mätningar.

P. A. NORSTEDT & SÖNER

Skolavdelningen - Box 898 - Stockholm 1

Aktuellt

Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning

höll den 11 april 1954 sitt vårsammanträde på Universitetets fysiska institution. I styrelsen invaldes efter läroverksadjunkten R. Nordenstedt, som undanbett sig återval, läroverksadjunkten Tage Holm, Eslöv. Ordföranden, lektor A. Leide, framförde föreningens tack till adjunkten Nordenstedt för hans värdefulla arbete inom föreningen. Övriga styrelsemedlemmar samt revisorer och revisorssuppleanter omvaldes. Lektor G. Arvidsson, Malmö, behandlade i ett föredrag det för fysikundervisningen just nu aktuella MKSA-systemet, som han ansåg kunna införas på gymnasiet, men knappast i realskolan. Dess fördelar framför äldre enhetssystem åskådliggjordes genom ett flertal exempel.

Efter en paus, då kaffe serverades å Fysicums lunchrum, höll professor K. Lundmark föredrag om frågor och problem inför sommarens totala solförmörkelse. Sedan han inledningsvis givit en koncentrerad framställning av solforskningens historia, skisserade han upp arbetsprogrammen för de fyra svenska astronomiska expeditioner, som skola förläggas till Sydkoster, Lyckås, norra Öland och sydspetsen av Gotland. Han underströk, att utforskandet av solens yttre delar hittills haft sammanlagt endast ca 2 timmar till sitt förfogande. Själv ämnade professor Lundmark i flygmaskin studera solförmörkelsen. Det intressanta föredraget belystes av en serie vackra ljusbilder.

Slutligen demonstrerade civilingeniör T. Wilner, Stockholm, en rad enkla, men ytterst instruktiva fysikaliska försök, väl ägnade att intressera skolungdom och sporra den till experimentell självverksamhet. Försöken över elektriskt laddade rökpartiklars rörelse i ett elektriskt fält, experimenten med fluorescensskärm och demonstrationen av radioaktivitet och kosmisk strålning medelst kontinuerlig dimkammare väckte speciellt stor entusiasm.

Efter sammanträdet, vid vilket föreningen bland deltagarna hade glädjen se redaktören för tidskriften Elementa, läroverksadjunkten C. E. Blom, Stockholm, intogs gemensam middag å Akademiska Föreningens restaurang. Ordföranden tackade därvid dagens tre föredragshållare och hyllade adjunkt Blom för hans mångåriga, värdefulla insats till fromma för undervisningen i ämnena matematik, fysik och kemi.

Birger Adell

Den totala solförmörkelsen den 30 juni 1954

Hur man med hjälp av enkla hjälpmedel (amatörkameror) kan utföra vetenskapligt värdefulla observationer under förmörkelsen beskriver observator Å. Wallenquist i en artikel i detta häfte, s. 107.

Förmörkelsen har inte endast astronomiskt utan även stort geodetiskt intresse. Lekmannen har här tillfälle att lämna värdefull hjälp. För närmare upplysningar härom bör den intresserade ta kontakt med professor Lars Asplund, Rikets allmänna kartverk, Stockholm 8.

I notisen om förmörkelsen i Elementas föreg. häfte, mars 1954, s. 39, meddelades att Almqvist & Wiksell förberedde en karta över förmörkelsen med tidsangivelser i svensk borgerlig tid. Denna karta är under utgivning och kommer att kosta kr. 1:50.

I en bok med titeln »Dagsmörkret över Sydsverige den 30 juni 1954» (Lindblads förlag, 80 s. kr 3:75) lämnar prof. Knut Lundmark en beskrivning av förmörkelsen med karta. Tiderna är emellertid här angivna i Greenwich-tid, varför de bör ökas med en timme.

Lundastudenternas kursverksamhet anordnar 28—30 juni två parallellkurser i samband med förmörkelsen, i Jönköping och i Gränna. Kurserna kommer att omfatta föredrag av bl. a. kursernas ledare, professor Knut Lundmark och av lektor Conrad Lönnqvist, och själva solförmörkelsen kommer att kommenteras i högtalare. Kursavgiften — inkl. undervisning, inkvartering i privatrum och måltider — är 65 kr. Anmälan göres före den 6 juni till Lundastudenternas kursverksamhet, Universitetet, Lund, postgiro 47207.

Sommarkurs i fysiologi och farmakologi

anordnas av Folkuniversitetsföreningen under tiden 14—23 juni 1954 på Karolinska institutet i Stockholm under ledning av professorerna Göran Liljestrand och Börje Uvnäs. Kursen kommer att handla om blodomloppet, nervsystemets kemiska regulationsmekanism, hormoner och vitaminer, kemoterapi (sulfapreparat och antibiotika), stridsgaser (nervgaser) och insektsbekämpande medel, sömnmedel, narkos och lokalbedövning m. m.

Förutom föreläsningar kommer demonstrationer och laborationer att anordnas. Dessa kommer att omfatta försök över olika kemiska ämnens inverkan på blodomloppet, nervsystemet, överlevande organ, ämnesomsättningen m. m. Studiebesök anordnas vid Statens institut för folkhälsan, Statens veterinärmedicinska anstalt, Lantbrukshögskolan i Ultuna och Linnés Hammarby.

Undervisningen är kostnadsfri så när som på en anmälningsavgift på 25 kr. Folkuniversitetsföreningen kommer att efter ansökan utdela ett antal resekostnadsbidrag. Program erhålles från Folkuniversitetsföreningen, Drottninggatan 120, Stockholm Va, dit även anmälan om deltagande i kursen sändes.

Bokanmälningar

C. Hyltén-Cavallius och L. Sandgren, *Plan geometri.* Hermods, Malmö 1953, 293 s., kr. 21:—.

För den, som under sin studietid vid universitetet för geometrikursen endast hade att välja mellan den svåråtkomliga »gamla Lindelöf» eller den stora och tungrodda Briot-Bouquet, är det förbluffande att det under de senaste sju åren kommit tre nya svenska universitetslärоböcker i geometri, en för varje universitet är man benägen att säga, alltså Carlsons för Stockholm, Bromans för Uppsala och Hyltén-Cavallius—Sandgrens för Lund. Denna embarras de richesse verkar rätt opåkallad. Den nyaste läroboken, i utsökt typografiskt skick utgiven av Hermods, torde bli den segrande i konkurrensen.

Att åstadkomma något originellt på detta område är redan det en prestation av förff., men bättre är att nyheterna oreserverat fångar ens intresse och gillande. Gången i läroboken är följande: först fyra kapitel om vektorer och koordinater, sedan två kapitel om likställighet, triangelgeometri och cirkeln, ett om lineära avbildningar, kap. 8, 9, 10 och 12 om kägelsnitt och kap. 11 om homogena koordinater.

Att vektorbegreppet lagts till grund för lärogången finner jag fullkomligt riktigt. Ser man på geometrien kinematiskt, kommer vektorn fram lika naturligt ur translationsrörelsen som vinkeln ur rotationsrörelsen. Vektorn är alltså ur denna synpunkt ett lika viktigt och elementärt begrepp som vinkeln. Om man kombinerar studiet av lärobokens tre första kapitel med studiet av komplexa tal (t. ex. enl. Frembergs komp.), får man ut ännu mer av vektorbegreppet. Det enda jag beklagar är, att inte förff. har givit anvisning på lämplig fortsatt litteratur om vektorräkning eller själva i ett appendix tagit med så mycket ytterligare av denna, att en fysiker därmed kunde ha fått vektorkalkylens fina instrument i sin hand.

Men varför behandlas aldrig det enkel- och dubbellogaritmiska koordinatsystemet i en universitetslärobok? En naturvetare får nu inte detta goda hjälpmedel behandlat vare sig i skolan eller vid universitetet. Barycentriska koordinater har väl mindre intresse?

I kap. 5 och 6 är en hel del elementär geometri medtagen, likställighet, satser om medianer och höjder i en triangel, harmoniska cirkeln etc., vilket inte alls är överflödigt med tanke på den magra geometri-dieten i läroverken. Den vackra satsen om Eulers linje finns med. Men är inte Menelaos' och Cevas satser, liksom t. ex. Ptolemaios' sats, historiska relikter?

Kapitlet om lineära avbildningar ger matematikläraren en god över-

sikt över och nya synpunkter på geometrien i realskolan. (Detta kap. hör icke till 1-betygskursen. Då nu allt fler lärare i realskolan torde bli »1-betygare», borde de akademiska fäderna ta sig en funderare på om avvägningen mellan 1- och 2-betygskursen är riktig. En del av den svårare analytiska kägelsnittsteorien kunde kanske utbytas bl. a. mot den lineära avbildningen?)

Den intressantaste nyheten är den *syntetiska* kägelsnittsgeometrien i kap. 8. Här genomförs för första gången i en svensk lärobok med hjälp av konen, dess plansnitt och tangerande klot en vacker syntetisk behandling av kägelsnittens alla väsentliga egenskaper. Här finns t. ex. två rent geometriska eleganta bevis för tangentens bisektrisegenskap, en lisa för den, som i likhet med rec. plågats av klumpigheten i det gängse analytiska beviset därför. Hela kapitlet är en fin läsning för gymnasieläraren och för den intresserade gymnasisten. Det är heller inte svårt, särskilt om man har de vackra och instruktiva plastmodellerna från Skolornas Inköpscentral (SICA, Stockholm 20) framför sig.

I förordet finnes till de studerandes gagn noga angivet, vilka delar av läroboken som hör till 1- och 2-betygskursen. De två avslutande kapitlen går i stora delar utöver denna kurs och ger, utan axiomatik, en god första inblick i den projektiva geometrien. I litteraturförteckningen saknar jag några av de mest kända läroböckerna på detta område, Enriques' »Vorlesungen über projektive Geometrie» och Veblen-Youngs axiomatiskt uppbyggda »Projective Geometry».

Läroboken är rikt försedd med figurer och exempel. De 270 figurerna är utsökt välritade — finns det så vackra figurer i någon annan svensk lärobok? Exemplen är så många, bortåt 500, att en särskild problemsamling är onödig för den studerande. Viktiga problemtyper belyses av ett genomräknat exempel.

De båda unga författarna har nedlagt ett utomordentligt arbete på sin lärobok, och de har också lyckats i sitt uppsåt att ge nordiska matematikstuderande en lärobok, som är i bästa mening modern: enkel, klar, stringent och åskådlig. De glömmer inte att i den analytiska geometrien ge geometrien vad den tillkommer, och man gläds åt alla enkla, rent geometriska bevis, som får ersätta de analytiska.

Det är en glädje att få ge författarna sin honnör och att få rekommendera deras lärobok till alla lärare och studerande.

Einar Lunell

C. R. Wylie Jr, *Calculus*, McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1953. Pp. X+565, $ 6.00.

Denna bok innehåller en grundkurs i differential- och integralkalkyl, skriven för andra collegeåret. Omfånget ligger något under tvåbetygskursen i en svensk fil. kand. eller fil. mag. Målsättningen är

emellertid en annan än vår. Den stränga logiska uppbyggnaden av analysen är styvmoderligt behandlad. Sålunda saknas helt teorien för irrationaltal, och för några väsentliga satser nöjer sig författaren med att konstatera, att de kunna bevisas. Beviset för existensen av den bestämda integralen av en kontinuerlig funktion föres så utförligt, att läsaren tror, att det är fullständigt, men ändå används likformigheten i kontinuiteten utan att närmare diskuteras eller visas följa av kontinuiteten på ett slutet intervall.

Ehuru författaren i förordet påpekar, att detta inte är en bok i tillämpad matematik, förefaller den att vara skriven mera med tanke på matematiken som hjälpvetenskap än som en självständig disciplin. En stor mängd fysikaliska tillämpningar och en elementär framställning om Fourierserier antyda detta.

Författaren har bemödat sig att göra framställningen lättillgänglig. Han vill, att läsaren skall få veta inte bara *hur* man angriper en viss problemställning utan också *varför* man angriper den just så. Första kapitlet ger en allmän överblick över analysen. Boken avslutas med ett appendix innehållande dels några sidor tabeller, dels en sammanställning av de viktigaste förkunskaper, som läsaren förutsättes besitta inom algebra, geometri och trigonometri, samt dels en ordlista. Ett stort antal tydliga figurer, t. ex. visande multipelintegralers beräkning som upprepade integraler, samt ett förnuftigt utnyttjande av typografiens möjligheter bidrager till att göra texten lättläst. Boken innehåller rikligt med exempel, dels sådana som äro lösta i detalj, och dels sådana som äro avsedda som övning. Endast till de svårare av den senare kategorien ges svaren.

Det förefaller mig som om boken skulle vara väl lämpad för självstudium. *Göran Björck*

Barry Spain, *Tensor Calculus.* I serien »University Mathematical Texts», Oliver and Boyd, Edinburgh and London 1953, Pp. 125, 8s. 6d.

Denna till formatet behändiga lilla bok är ett nytt bidrag till den tämligen rika floran av läroböcker i tensorkalkyl. Vad boken ger kan de flesta läsare i stort sett och utan mera möda erhålla ur vilken som helst av ett flertal andra böcker. Detta betyder ej att boken är ointressant, ty om man vid jämförelse med övriga böcker sorterar bort dem för vilka Riemanngeometrien är ett ändamål snarare än ett medel, får Spains bok strax en gynnsammare ställning, som blir än gynnsammare om också inköpspriset är en faktor att räkna med.

Spains framställning av ämnet får sin form därav att han vill göra den kortfattad men ändå ej alltför begränsad till innehållet. På grund av denna utformning kan boken med fördel läsas av dem som

vill lära tensorkalkyl att begagnas som ett verktyg inom fysik eller teknik, och som har något större kunskap än vad Spain förutsätter, nämligen elementär kännedom om determinanter och matriser.

Efter den allmänna framställningen av tensorkalkylen följer ett avsnitt med tillämpning på tredimensionell euklidisk geometri. Anmälaren tror, att en omkastning av ordningsföljden mellan avsnitten skulle ha gjort framställningen mer lättillgänglig genom att den därigenom måste ha gjorts mindre axiomatisk. Författarens arbete hade emellertid kanske komplicerats.

Ett tredje avsnitt behandlar teorin för elastiska media, och kan läsas med hundraprocentig behållning, sedan man lärt det väsentligaste av de båda föregående avsnitten. Detsamma kan man ej säga om fjärde avsnittet, som behandlar tillämpning inom relativitetsteori. I detta avsnitt torde den med allmän relativitetsteori icke förtrogne läsaren få nöja sig med att beskåda en del av relativitetsteoriens matematik.

Bokens värde förhöjs av en del trevliga exempel. *Per O. Olsson*

Lars Hörmander—Lennart Sandgren, *Matematisk problemsamling för två betyg,* Lund 1954, 55 s. Pris kr. 8:— vid rekvisition från Lunds Studentkårs Intressebyrå.

De båda författarna tillkännager i förordet: »Vid utarbetandet av denna problemsamling har vi huvudsakligen använt oss av två källor: Tentamensskrivningar, som givits för två betyg i fil. kand.- och ämbetsexamen under de senaste tio åren, och problem, som sammanställts för seminarieövningar vid Lunds Universitet. Dessutom har utnyttjats ett 50-tal problem ur Matematisk problemsamling, 2-betygskursen (Lund 1942)» (numera utgången).

Försök har gjorts att indela problemen i kapitel efter deras innehåll. Samlingen innehåller 300 problem med korta anvisningar och svar på de viktigaste momenten i tvåbetygskursen. Den är överskådligt uppställd och väl genomarbetad. Svaret på uppg. 172 bör emellertid vara $\frac{1}{3}(10\sqrt{10}-8-6\sqrt{6})$. — Häftet kommer säkert att röna samma efterfrågan som lundasamlingen från år 1942. *Hans Riesel*

R. B. Braithwaite, *Scientific Explanation.* A Study of the Function of Theory, Probability and Law in Science. Cambridge University Press 1953, Pp. 376, 40s. net.

»Sannolikheten för en gosseföds är 51/100.» Vad menas med detta? Matematiker och filosofer har skiftat många hugg över de till synes oskyldiga orden. Dr Braithwaite, nyutnämnd professor i Moral Philo-

sophy i Cambridge, ger i sitt arbete om vetenskapens logiska grundvalar en ny tolkning åt orden, som inte är oäven. Efter en revision av författarens framställning — en sådan är nödvändig för att tolkningen skall kunna vinna allmänt erkännande — är det mycket möjligt, att det ovan nämnda handgemänget kan upphöra. Författaren har vidare med stor grundlighet satt sig in i moderna sannolikhets- och hypotesprövningsteorier och granskar de filosofiska grundvalarna för så färska ting som Walds decision functions och von Neumanns spelteori. Sällan har de filosofiska eftertrupperna följt framryckningen så tätt i spåren!

Drygt halva boken ägnas åt andra ting än sannolikhetskalkyl. I kapitlet »Scientific deductive systems and their representations» ges trevliga, mycket detaljerade exempel på symbolspråkets betydelse för vetenskapen. I andra kapitel diskuteras bruk och missbruk av modeller samt frågor rörande induktion och kausallagar.

Förlagsreklamen är realistisk: »... those who read it will find that, though they are led by a master, he expects hard work from those who will go with him.» Det kan man skriva under på, särskilt som man här och där måste vara på sin vakt mot slutsatserna (t. ex. när det för en statistiker dyrbara ordet randomness detroniseras). Efter slutad läsning var anmälaren-statistikern missnöjd både med författaren för det tunga framställningssättet och med sig själv för tidigare kritiklöst anammande av ingalunda självklara ting. Det är nyttigt med filosofi. *Gunnar Blom*

M. H. Hansen, W. N. Hurwitz and W. G. Madow, *Sample Survey Methods and Theory.* Vol. I. Methods and Applications, Pp. 638, $ 8.00. Vol. II. Theory, Pp. 332, $ 7.00. J. Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London 1953.

W. G. Cochran, *Sampling Techniques.* J. Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London 1953, Pp. 330, $ 6.50.

Wiley-förlaget har genom sin statistikserie lämnat vägande bidrag till den statistiska lärobokslitteraturen. I seriens ca 25 volymer befinner sig flertalet av de bästa böcker både på elementär och avancerad nivå, som utkommit på senaste tiden.

Ovanstående böcker bestyrker påståendet. De är förnämliga representanter för amerikansk lärobokslitteratur. Båda behandlar stickprovsundersökningarnas teori och metodik.

På detta område har så mycket hänt på femton år, att även erfarna statistiker lätt hamnar på efterkälken. Framför allt har folket vid Bureau of the Census i Washington åstadkommit märkliga ting. Det är mycket tacknämligt, att de nu samlat sig till det mäktiga verk, som Sample survey methods and theory utgör.

Det kan verka förbluffande, att man behöver 1000 sidor för att tala om hur stickprov skall uttagas och bearbetas. Är det verkligen så konstigt, frågar en och annan, som utan att darra på manschetten planerat dyrbara stickprovsundersökningar på människor, djur eller material med en portion sunt förnuft som enda hjälpmedel. Man behöver inte läsa många av de 1000 sidorna för att förstå, att det inte är likgiltigt ur kostnads- och precisionssynpunkt, om man begagnar simple sampling, stratified sampling, systematic sampling, double sampling eller kanske ytterligare någon annan form av sampling, och att valet dem emellan är en stor konst, som behöver studeras (och dessbättre numera kan studeras). De provningsföreskrifter som utfärdas här i landet skulle må väl — en del kanske snarare ganska illa — av att granskas ur denna synpunkt, andra tillämpningsmöjligheter av den generella teorien att förtiga.

Cochrans bok kan betraktas som ett självständigt utfört sammandrag av den utförliga teori och metodik, som presenteras i ovan kommenterade arbete. Den är inte större, än att varje statistiker borde vara skyldig att på sin arbetsgivares bekostnad detaljläsa den. Med litet besvär kan den också läsas av andra med hum om normalfördelning, standardavvikelse och binomialserie. Den är mästerligt skriven och ger både teoretikern och praktikern sitt. Detta arbete ger en efterlängtad möjlighet till översikt över ett område av statistiken, som intresserar både tekniker, sociologer, marknadsundersökare, statligt utredningsfolk och alla andra som behöver stickprov för ett rätt utövande av sin verksamhet. *Gunnar Blom*

G. K. Batchelor, *The Theory of Homogeneous Turbulence*. Cambridge Univ. Press, London 1953, Pp. 197, 25s. net.

Den store mannen inom den moderna turbulensteorien är den ryske statistikern och matematikern Kolmogorov, och genom hans insatser har 1941 blivit ett genombrottsår för turbulensforskningen. Batchelor, verksam vid Cambridge, framstår som mannen, som först förde Kolmogorovs tankar över den ridå, som delar även den vetenskapliga världen, och detta skedde år 1947.

Denna bok är en monografi över ny litteratur om homogen turbulens, dvs. turbulens, där rörelsens statistiska egenskaper äro desamma i alla punkter i strömningsfältet. Detta är givetvis ett mycket speciellt fall, men det har en viss praktisk aktualitet liksom ett antagande om samtidig isotropi, då korrelationer mellan hastighetskomponenter o. dyl. äro invarianta vid alla ortogonala transformationer av referenskoordinatsystemet. Det är i dessa speciella fall möjligt att med kända statistiska metoder nå resultat, som experimentellt kunna kontrolleras, och man har på detta sätt gjort de grundläggande hypoteserna tro-

värdiga. De allmänna fallen av turbulens äro i dagens läge oåtkomliga för en lika ingående analys, och teorien kan här blott skissera den oordnade rörelsen i mycket stora drag. Ett stort problem, som alltjämt väntar på sin lösning, är frågan om turbulensens uppkomst.

Förf. behandlar först i tre kapitel de statistiska grundvalarna för teorien i detta speciella fall. Detta är nödvändigt för att läsaren skall bliva insatt i de speciella beteckningar och definitioner, som användas, men en förutsättning är goda förkunskaper i ämnet, lämpligen inhämtade i Kolmogorovs bekanta bok »Foundations of probability» (Chelsea, N. Y. 1950). Därefter behandlas frågan om turbulensens »decay» dvs. utdöende. Under de gjorda förutsättningarna om homogenitet i rummet vid varje tidsögonblick kommer rörelseenergi att omsättas i värme, och detta kan studeras statistiskt med utgångspunkt från Navier-Stokes ekvationer. I de två sista kapitlen jämföras teoretiska och experimentella resultat.

Denna bok är en lärd bok om turbulens. Den är självskriven som kursbok vid högre studier i hydrodynamik, och den kommer säkert att väcka mången statistikers intresse för ett rikt arbetsfält.

Bengt Andersson

Louis de Broglie, *Éléments de théorie des quanta et de mécanique ondulatoire.* Gauthier-Villars, Paris 1953. 302 p., 3000 fr.

de Broglies nyutkomna grundläggande lärobok i kvantmekanik baserar sig på föreläsningar, som författaren hållit sedan 1934 i l'École Normale Supérieur.

Framställningen inledes med Maxwells elektromagnetiska teori och Lorentz' elektronteori, som följes av ett par kapitel om den speciella relativitetsteorien och en kort orientering i klassisk statistisk mekanik. I den följande behandlingen av den svarta strålningen med dess historiska revy över strålningslagarna saknar man egentligen endast Kirchhoffs namn. Dualiteten vågor—korpuskler diskuteras igenom, varefter författaren via Balmer-formeln och Ritz' kombinationsprincip kommer fram till Bohrs och Sommerfelds teorier. Den »klassiska» delen av boken avslutas med korrespondensprincipen, varefter övergången mellan klassisk mekanik och vågmekanik följer med uppställandet av Schrödinger-ekvationen. Härefter följer kontinuitetsekvationen för sannolikhetstätheten och Ehrenfests teorem samt de vanliga grundläggande exemplen, osäkerhetsrelationen och ett kapitel om Heisenbergs matrismekanik. Avslutningsvis behandlas elektronspin och Diracs relativistiska teori samt en resumé över kvantstatistiken.

Varje kapitel avslutas med en kort bibliografi. *Eric Uggla*

Reports on Progress in Physics, Vol. XVI. The Physical Society, London 1953, Pp. iv+407, 50s. net.

Vol. 16 av Reports on Progress in Physics innehåller i ordning följande monografier (förf. inom parentes): *Neutron Diffraction* (G. E. Bacon, Atomic Energy Research Establishment, Harwell, och K. Lonsdale, University College, London), *Physical Properties and Atomic Arrangements in Crystals* (W. A. Wooster, Department of Mineralogy and Petrology, University of Cambridge), *Raman Effect in Solids* (A. C. Menzies, Hilger and Watts, Ltd., London), *Paramagnetic Resonance* (B. Bleaney och K. W. H. Stevens, Clarendon Laboratory, Oxford), *Semiconductor Circuit Elements* (J. S. Blakemore, Standard Telecommunication Laboratories Ltd., London, A. E. De Barr och J. B. Gunn, Elliott Brothers Ltd., Research Laboratories, London), *Electrical Discharges* (F. Llewellyn Jones, Department of Physics, University College of Swansea), *Fluctuation Theory in Physical Measurements* (C. W. McCombie, Department of Natural Philosophy, University of Alberdeen), *Cosmology* (W. H. McCrea, Royal Holloway College, University of London, Gonville and Caius College, Cambridge), *The New Unstable Cosmic-Ray Particles* (G. D. Rochester och C. C. Butler, The Physical Laboratories, University of Manchester).

De fem första uppsatserna, drygt hälften av boken, ge tillsammans en bred översikt av de senare årens forskning rörande det fasta tillståndets fysik, ett område som nu är på modet och som man på sina håll (särskilt i Amerika) börjat betrakta som en självständig disciplin (»solid state physics»); forskningsarbetet har hittills resulterat i fördjupad kunskap om den fasta aggregationsformens fascinerande fenomenvärld och har därjämte avsatt ett flertal viktiga tekniska tillämpningar, bl. a. kristalldioden och transistorn.

Llewellyn Jones redogör för nyare undersökningar inom gasurladdningsfysiken, ett område som under ett par mansåldrar ägnats en oändlighet av forskarmöda. Kärnfysikens, jonosfärforskningens och den moderna energiöverföringsteknikens behov ha givit området förnyad aktualitet. Ansenliga framsteg ha gjorts under senare år, men de flesta problemen kvarstå olösta.

McCombie ger en förhållandevis elementär men strängt logisk framställning av teorien för spontana fluktuationer och dess tillämpning på enkla fysikaliska mätprocedurer. Fluktuationsteorien, vars mättekniska betydelse först torde ha klargjorts av professor G. Ising i samband med hans bekanta undersökningar avseende gränsen för galvanometrars känslighet och som studerades ingående under mellankrigstiden av F. Zernike, nobelpristagare 1953, utvecklades starkt under

andra världskriget av i radartekniken engagerade fysiker och matematiker. De mera avancerade aspekterna behandlas dock inte i McCombies uppsats.

McCrea behandlar det mest exklusiva av fysikens tillämpningsområden, »the study of the universe as a whole or of the large-scale properties of the universe». — »The whole subject is in a somewhat inconclusive state, and the main purpose of the review is to describe the lines of thought being pursued in current work.»

I den sista uppsatsen (44 sid.) redogöres för vad som hänt inom partikelfysiken sedan 1950, då Powell i Progress gav en översikt av dittills vunna resultat (jfr Elementa *34*, 234, 1951), och beskrivas de nyupptäckta instabila partiklarna med massor mellan $400\,m_e$ och $2200\,m_e$ (m_e=elektronens massa). Partikelfysiken framstår nu som ett område med särdeles invecklade förhållanden, och man måste nog räkna med att de djupare sammanhangen inte bli klarlagda allt för snart. »Indeed the present position bears some resemblance to the early days of spectroscopy and radioactivity.»

Detta sextonde band av Progress utmärkes av samma höga standard som de tidigare volymerna. Progress hävdar sin ställning som världens förnämsta monografiska serieverk inom fysikens område.

Torsten Jönsson

O. Klemperer, *Electron Optics*. Cambridge Univ. Press 1953, Pp. 471, 50 s. net.

Första upplagan utkom i slutet av 30-talet och var vid den tiden en av de böcker som bäst lämpade sig för introduktion på detta område. Den har säkert betytt mycket för alla dem, som då började intressera sig för elektronoptik. Ungefär samtidigt kom de första användbara konstruktionerna av elektronmikroskop, och elektronoptiken fick vidsträckta industriella tillämpningar. Mycket har naturligtvis hänt under 15 år, och Klemperers bok har för länge sedan förlorat aktualitet. Under tiden har ett flertal andra goda monografier utkommit.

Efter ett studium av Klemperers nya, helt omarbetade och väsentligt utökade bok kan man emellertid med tillfredsställelse konstatera att den står sig mycket gott i jämförelse med övriga moderna verk på området. Klemperer har koncentrerat framställningen till de mera grundläggande teoretiska problemen och har därvid eftersträvat ett överskådligt behandlingssätt. En del nyare tillämpningar av elektronoptiken har också medtagits.

Klemperer har själv lämnat ett flertal värdefulla bidrag till den elektronoptiska forskningen, och hans bok bär också i hög grad det självupplevdas prägel, vilket naturligtvis ytterligare ökar bokens värde.

Kai Siegbahn

Ludwig F. Audrieth—Jacob Kleinberg, *Non-aqueous solvents; applications as media for chemical reactions.* John Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London 1952, Pp. 284, $ 6.75.

Än idag gäller Wilhelm Ostwalds ord, att vår kemi är vattensjuk, ehuru ej med samma styrka som vid sekelskiftet. Den genomsnittlige kemisten har, på grund av de lokala förhållandena på vår planet, ganska grundliga kunskaper om hur olika organiska och oorganiska ämnen beter sig i vattenlösningar. Däremot vet han i allmänhet mycket litet om hur t. ex. salter beter sig i andra lösningsmedel, såsom flytande ammoniak, cyanväte eller svaveldioxid. Dessutom har han ofta föga begrepp om hur det praktiskt ter sig att arbeta med dylika vätskor.

Audrieth och Kleinberg har nu, liksom tidigare Jander i Tyskland, försökt ge en översikt över de rön som under de senaste årtiondena gjorts beträffande kemin — framförallt jonföreningars kemi — i icke-vattenlösningar. Redan i titeln betonas dessa lösningars tilltagande betydelse för syntetiska arbeten.

Efter en allmän översikt av olika sätt att indela lösningsmedlen, och av de olika syra-basbegrepp som nuförtiden används, ägnas fyra kapitel åt lösningar i flytande ammoniak. Man får veta åtskilligt om den experimentella tekniken vid arbeten med NH_3, om de underliga blå metall-lösningar som tycks innehålla solvatiserade elektroner och om Franklins »kvävesystem», dvs. motsvarigheterna mellan kväve- och syreföreningar.

Att just ammoniak fått en så framträdande plats beror delvis på amerikansk tradition: det var detta lösningsmedel som Franklin och Charles Kraus började undersöka, och även Audrieth har arbetat med det. Vad man inte får veta är, att Kraus efter några år fann att det var onödigt besvär att arbeta med flytande ammoniak under kyla och tryck, när man kunde studera samma lagar — särskilt för ledningsförmågan — i mycket lätthanterligare lösningsmedel. Hela Kraus-skolans senare arbeten om elektrolytlösningar i kolväten och andra organiska ämnen har utelämnats. En tänkbar orsak är att dessa arbeten snarare syftade till att förstå lösningarnas uppbyggnad än till att framställa nya föreningar.

De följande kapitlen behandlar andra kvävehaltiga lösningsmedel (såsom aminer, pyridin, hydrazin, HCN och acetamid), ättiksyra, svavelsyra, klorväte, svaveldioxid, syraklorider ($SeOCl_2$, $COCl_2$, NOCl, $POCl_3$) samt halogener och deras föreningar med varandra. Urvalet av lösningsmedel är något större än Janders. Sista kapitlet behandlar förlopp vid högre temperaturer och ger bl. a. en kort redogörelse för de synpunkter på oxidhaltiga smältor som införts av Lux i Tyskland och av Flood och Förland i Norge.

John Wiley & Sons, Inc., New York; Chapman & Hall, London 1954:

H. R. Cooley, *First Course in Calculus.* Pp. 643, $ 6.00.

Adele Leonhardy, *Introductory College Mathematics.* Pp. 459, $ 4.90.

H. C. Fryer, *Elements of Statistics.* Pp. 262, $ 4.75.

C. C. MacDuffee, *Theory of Equations.* Pp. 120, $ 3.75.

R. E. Langer, *Ordinary Differential Equations.* Pp. 249, $ 4.50.

T. S. Gray, *Applied Electronics.* 2nd Ed. The Technological Press (MIT), Pp. 881, $ 9.00.

J. K. Vennard, *Elementary Fluid Mechanics.* 3rd Ed. Pp. 401, $ 5.50.

V. L. Dougthie—W. H. James, *Elements of Mechanics.* Pp. 494, $ 6.00.

Ph. G. Laurson—W. J. Cox, *Mechanics of Materials.* 3rd Ed. Pp. 414, $ 5.75.

J. F. Young, *Materials and Processes.* 2nd Ed. Pp. 1074, $ 8.50.

C. G. B. Carrett, *Magnetic Cooling.* Harvard University Press, Pp. 110, $ 4.50.

J. H. Harley—S. E. Wiberley, *Instrumental Analysis.* Pp. 440, $ 6.50.

S. Siggia, *Quantitative Organic Analysis via Functional Groups.* 2nd Ed. Pp. 227, $ 5.00.

O. G. Sutton, *Mathematics in Action.* G. Bell & Sons, London 1954, Pp. 226, 16s. net.

W. V. D. Hodge—D. Pedoe, *Methods of Algebraic Geometry.* Vol. III. Birational Geometry. Cambridge Univ. Press 1954, Pp. 336, 40s. net.

E. A. Maxwell, *An Analytical Calculus.* Vol. I. Pp. 165, 15s. net; Vol. II. Pp. 272, 18s. net. Cambridge Univ. Press 1954.

Britain's Atomic Factories. Her Majesty's Stationary Office, London 1954, Pp. 100, 5s. net.

Static Electrification. A Symposium held by The Institute of Physics in London 25—27 March, 1953. British Journal of Applied Physics. Suppl. No. 2, London 1953, Pp. 100, 25s. net.

Premier Colloque sur les équations aux dérivées partielles (Louvain 17—19 déc. 1953). Masson & Cie, Paris 1954, 129 p., 1400 fr.

M. Huybrechts, *Chimie analytique, appliquée a la métallurgie.* Troisième éd. par R. Chandell et C. Vandael. Masson & Cie, Paris 1953, 472 p., 2800 fr.

G. Bruhat, *Cours de physique générale optique.* 4e éd. par A. Kastler. Masson & Cie, Paris 1954, 906 p., 3000 fr.

W. Reppe, *Polyvinylpyrrolidon.* Verlag Chemie, Weinheim/Bergstrasse 1954, 72 S., DM 9.80.

Fr. Böhm, *Versicherungsmathematik I.* Dritte Aufl. W. de Gruyter, Berlin 1953. 151 S. Dm 2.40.

T. Bjerge, *Elektron- og atomfysik.* 2. ændrede udg., E. Munksgaard, København 1954, 217 s., dkr. 22:—.

O. Ingebrigtsen—K. Piene, Oppgavesamling for realskolens og gymnasets 2 første klasser. 3 oppl. Cappelens Forlag, Oslo 1954, 128 s.

H. Faxén, *Mekanik.* Statik. Föreläsningar och övningsuppg. Första häftet (s. 1—96), kr. 7:50; andra häftet (s. 97—230), kr. 7:50. Seelig & Co., Stockholm 1953 och 1954.

L. Hörmander—L. Sandgren, *Matematisk problemsamling för två betyg.* Lund 1954, 55 s. Kr. 8:— vid rekv. direkt från Lunds Studenters Intressebyrå.

Tentamensuppgifter i matematik för betyget: Berömlig, 16 s., 133 uppg., kr. 3:—. Med beröm godkänd, 28 s., 250 uppg., kr. 3:—. Godkänd, 25 s., 233 uppg., kr. 3:—. Samtliga stencilerade (utan svar). Rekv. från Matem. Institutionens vaktmästare. Uppsala 1952 och 1953.

Hj. Nilsson—F. Wigforss, *Geometri och planimetri.* Almqvist & Wiksell, Stockholm 1954, 152 s., kr. 12: 50.

C. Bergholm, *Lärobok i fysik II.* Värmelära, 7:e uppl., Lindblads förlag, Uppsala 1953, 70 s., kr. 3: 25.

Bengt E. Nilsson, *Fysik.* Del I A. Allmänna linjen. Natur och Kultur, Stockholm 1953, 64 s., kr. 2: 70.

Falk—Sjöholm—Skerfe, *Naturen och vi.* Lärobok för folkskolan. Del III. Hälsolära, kemi, fysik, geologi, meteorologi. Svenska Bokförlaget, Stockholm 1954, 272 s., kr. 7: 25.

Knut Lundmark, *Dagmörkret över Sverige den 30 juni 1954.* Lindblads förlag, Uppsala 1954, 80 s., kr. 3: 75.

Tidskrifter

Nordisk Matematisk Tidskrift, Oslo 1953: 4.

Ur innehållet: K.-G. Hagstroem, Gustaf Eneström. Till hundraårsminnet av hans födelse; H. Gask, Exponential- och logaritmfunktionen på gymnasiet; D. Fog, Om et geometriskt sted ved ellipse og hyperbel; I. Johansson, En unødvendig pedagogisk vanskelighet ved limes-begrepet. Litteratur. Oppgaver.

Fra Fysikkens Verden, Oslo, årg. 15: 4.

Ur innehållet: J. Aars, Professor Christen Finbak, In memoriam; N. Arley, Oversikt over mekanikens historie; J. Markali, Elektronmikroskopet og noen eks. på dets anvendelse; Aadne Øre, Tre fotoner — teori og eksperiment; H. v. Ubisch, Naturlig tritium og aldersbestemmelse, en paralell till kull-14 metoden.

Fysisk Tidsskrift, København 1953: 5—6.

Ur innehållet: R. E. H. Rasmussen, Om Undersøgelse af omtrent rette Kanter (Liealer) og af omtrent plane Flader; S. Saxov, Radar systemer og afstandsmåling; H. E. Rahbek, Dislokationer og glidning i krystaller; Fr. Nielsen, Model af Cockroft og Waltons Højspændingsanlæg. Danske Eksamensopgaver.

Science Progress, London 1954: April.

Ur innehållet: The nodule bacteria and their host legumes: Some problems that the still present; The structure of the synthetic α-polypeptides; Fossil species; A palæobotanical centenary; Acoustics in modern life. Recent advances in science: Astronomy, Physics, General and physical chemistry etc. Ett stort antal bokanmälningar.

Discovery, London 1954: February, March, April.

Ur innehållet: R. A. Millican, 1868—1953; The nature of Fiji and Tonga; Modern advances in lubrication; Einstein is seventy-five; The National Institute of Oceanography; Paul Ehrlich, 1854—1915; The atomic submarine; Man's economic interest in plants; Unconventional power units for road vehicles; A first tracer mineral; The molecular architecture of high polymers. Ett stort antal aktuella notiser under rubriken »Progress of Science».

Endeavour, London 1954: January.

Ur innehållet: Radiocarbon dating; Jean Picard and his circle; The Zoological Station of Naples; Hardness of solids; Irradiation colours in minerals. Bokanmälningar.

När man läser en sådan bok i ett sträck gör den ett kaleidoskopiskt intryck; det har ju varit ett mycket ojämnt material som författarna haft att sammanställa, och ofta tycks det som om dessa andra lösningsmedel skulle ha lockat kemister med snarare preparativ än fysikalisk inriktning. Dock måste sägas att A. och K. gjort sitt bästa för att överskådligt sammanställa de data, som är av betydelse för att bedöma hur lösningarna troligen är byggda. En god hjälp är att reaktionerna i lösningen behandlas från en enhetlig utgångspunkt med hjälp av Brönsteds och Lewis' syra-basbegrepp.

Detta är ett fält, där varje självständig kemist bör vara orienterad, och man får vara tacksam att en sådan god vägledning som Audrieth och Kleinbergs bok nu finns tillgänglig. Det lämpligaste sättet att handskas med boken lär för mången kemist vara, att man läser de allmänna kapitlen rakt igenom, därpå bläddrar igenom resten och slutligen noggrannare läser kapitlen om ett eller ett par lösningsmedel, som man är eller blir särskilt intresserad av. *L. G. Sillén*

Alwin Mittasch, *Salpetersäure aus Ammoniak.* Verlag Chemie, Weinheim/Bergstrasse, 1953, 136 S., DM 12:—.

Författarens syfte med detta arbete är huvudsakligen historiskt-kemiskt. Han visar, hur man successivt ur tämligen enkla försök kommit fram till metoder för att i storindustriell skala överföra ammoniak via kväveoxider och nitrit i natriumnitrat och salpetersyra. Framställningen omfattar tiden från slutet av 1780-talet till 1920, och den från detta tidsintervall stammande kemiska och kemisk-tekniska litteraturen rörande ammoniakens oxidation på olika vägar diskuteras utförligt. Speciellt intresse ägnas användningen av katalysatorer, och de insatser, som Friedrich Kuhlmann och Wilhelm Ostwald gjort ifråga om platina-katalysatorn, framhävas. Här är författaren också inne på sitt eget specialområde. I bokens sista kapitel ger han nämligen en nästan dramatisk skildring av hur han och dr Chr. Beck i Badische Anilin- und Sodafabrik hösten 1914 på uppdrag av den bekante dr Carl Bosch snabbt lyckades utarbeta en metod att med användning av annan katalysator än platina ur ammoniak framställa salpetersyra. Då hade Tyskland avspärrats från salpetertillförsel utifrån, led brist på platina och stod inför en hotande ammunitionsbrist. Den nya katalysatorn, brunoxid, som utgjordes av en blandning av järnoxid, manganoxid och vismutoxid i ärtstora bitar, undanträngdes efter första världskrigets slut av den effektivare platinan, men togs under andra världskriget åter i bruk. Den sista brunoxidanläggningen nedlades först år 1951.

Boken måste sägas vara tungläst, främst tack vare överflödet på kemisk-tekniska detaljer och det alltför ringa antalet belysande

Forts. s. 148.

Problemavdelning[1]

Matematiska uppgifter

1930) *En rät linje d, som vrider sig kring punkten D på den kring triangeln ABC omskrivna cirkeln, skär BC, CA, AB i* A_1, B_1, C_1. *Normalerna mot d i* A_1, B_1, C_1 *råka respektive normalerna i D mot DA, DB, DC i tre punkter, vilka ligga på en rät linje, som går genom en fast punkt.* *V. Thébault*

1931) *Man drager två parallella obegränsade tangenter till en kubisk parabel P och mellan dem en parallell sekant l. Orten för mittpunkterna av de tre sträckor P avgränsar på l utgör, när l intager alla lägen, en kurva* P_1. *Sök förhållandet mellan areorna av de ytstycken i vilka* P_1 *och P dela det område som begränsas av tangenterna och mellanliggande ytterbågar av P.* *X.*

1932) *En godtycklig talföljd* c_1, c_2, c_3 ... *är given. Beräkna* x_n *enligt rekursionsformlerna* $x_1 - c_1 = 0$, $x_n - c_n = \sum_{1}^{n-1}(p)\, c_{n-p} \cdot x_p$, $n = 2, 3 \ldots$ *Man finner ett polynom i* $c_1, \ldots c_n$. *Giv en förklaring av antalet olika termtyper däri. Beräkna speciellt* x_n, *då* $c_n = a^{n-1}$, $n = 1, 2 \ldots$ *R. Johnsson*

Enklare matematiska uppgifter[2]

1933) Bestäm en femsiffrig primtalskvadrat så, att dess siffror i omvänd ordning bilda en numeriskt mindre femsiffrig primtalskvadrat.
Svar: $311^2 = 96721$.

1934) I en aritmetisk serie med heltalstermer är den sjunde termen en sjundedel av den sjuttiosjunde. En term i serien är 100. Bestäm dess ordningsnummer.
Svar: 2 eller 12.

1935) Visa, att ekvationen $a \sin x + b \cos x + c = 0$ har reella rötter endast om $a^2 + b^2 \geqq c^2$.

1936) Om höjderna i triangeln ABC utdragas, råka de den kring triangeln omskrivna cirkeln i punkterna A_1, B_1, C_1. Sök förhållandet mellan ytorna av trianglarna $A_1B_1C_1$ och ABC.
Svar: $8 \cdot |\cos A \cos B \cos C|$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Banérgat. 33, Stockholm Ö.
[2] Uppg. 1933 är insänd av *Y. Ekedahl*, 1934—1935, 1939 av *B. Svenonius*, 1936, 1942 av *I. Gunsjö*, 1937, 1943 av *Ph.* 1938 av *E. Nilsson*, 1940—1941 av *G. Wranglén*.

1937) Ekvationerna för en triangels sidor äro $3411x+5191y-11417=0$, $4435x+7239y-10393=0$, $7574x-3787y+15451=0$. Sök ekvationen för höjden mot den sistnämnda sidan.

Svar: $x+2y+1=0$.

1938) Visa, att linjerna $(m-1)x-(m+1)y+m^2-1=0$, $(n+1)x-(n-1)y-n^2+1=0$, $x+y-mn+1=0$ råkas i samma punkt (eller sammanfalla).

1939) Kurvorna $y=ax^n$ och $y=bx^m$ (m och n olika positiva heltal) antagas råka varandra i en utanför origo belägen punkt. Tangenter dragas till kurvorna i denna punkt. Visa, att förhållandet mellan deras vinkelkoefficienter är oberoende av a och b.

1940) Diskutera kurvan $y=2^{\frac{x+1}{x-1}}$.

Svar: Asymptoter: $x=1$ (då $x\to 1^+$), $y=2$. Slutpunkt i $(1;0)$ (då $x\to 1^-$).

1941) Bestäm den vinkel under vilken kurvorna $x^2+y^2+2x-2y=0$ och $x^2+x-y=0$ skära varandra.

Svar: $63{,}43°$.

1942) Konstruera axlarna till ett kägelsnitt, som har ena fokus i en given punkt A, tangerar två givna linjer och vars konjugataxel (ev. förlängd) går genom en given punkt B.

Ledning: *En* ort för centrum är mittpunktsnormalen till A_1A_2, då A_1 och A_2 äro projektionerna av A på de givna linjerna, en annan cirkeln med AB som diameter.

1943) Räta linjen $y=x$ skär kurvan $xy=1$ i A i tredje kvadranten och kurvan $y(x+1)^2=x^2+1$ i B. De senare råkas i C. Beräkna ytan av triangeln ABC.

Svar: En ytenhet. Ledning: Visa, att $x_B\cdot x_C=1$.

Lösningen till uppg. 1902—1904.[1]

1902) *Den vid sidan BC i triangeln ABC vidskrivna cirkeln tangerar denna sida i A_1 och förlängningarna av de övriga sidorna i B_1 och C_1. Man vet, att linjerna AA_1, BB_1, CC_1 råkas i samma punkt, som antages ligga på den omskrivna cirkeln. Visa, att $\cos A=\cos B+\cos C$ och att $R=r_a$=längden av resp. cirklars gemensamma korda.*

V. Thébault

Fäll normalerna C_1C_2 och B_1B_2 mot AB_1 resp. AC_1. Emedan vinklarna $(B_1B,\ C_1C)$ och $(B_1B_2,\ C_1C_2)$ äro lika, gäller i den likbenta triangeln AB_1C_1: $AB_2+AC_2=AB+AC$, ty de lika höjderna B_1B_2 och C_1C_2 skola vridas samma vinkel kring B_1 resp. C_1 för att falla längs B_1B resp. C_1C. Således är $b+c=2p\cos A$, dvs. $\sin B+\sin C=\cos A(\sin A+\sin B+$

[1] *K. Bockasten* hade insänt lösningar till uppg. 1876—78, marsh. 1954, s. 66.

$+\sin C$). Ersättes vänstra ledet med $\sin(A+C)+\sin(A+B)$, erhålles $\sin A\cos A=\sin A(\cos B+\cos C)$. Härav fås $\cos B+\cos C+\cos(180°+A)+$ $+1=1$, och enl. känd formel följer sedan $4\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C=1$ dvs. $r_a=R$. I cirkeln (O, R) finnas ∞^1 inskrivna trianglar ABC, vilkas sidor tangerar cirkeln (I_a, r_a). Betrakta den ena gemensamma tangenten med resp. kontaktpunkter K och K_1. En av de ifrågavarande trianglarna kan anses ha två sammanfallande hörn i K; tredje hörnet måste vara den ena, Q, av cirklarnas gemensamma punkter, ty KQ måste vara tangent till (I_a, r_a) i Q. Då cirklarna äro lika stora, är triangeln KQK_1 liksidig och cirklarna råkas under 60°, varav påståendet genast följer. Resultatet fås även enkelt ur Eulers relation $OI_a^2=R^2+2Rr_a$, så snart man vet, att $R=r_a$. *X.*

Även löst av *N. J.*, *I. Gunsjö* och *Sb.*

1903) *Givna äro linjen l och två punkter P och Q i samma plan, båda utanför l. Genom punkten U på l drages i detta plan linjen u så, att vinklarna (u, UP) och (l, UQ) ha gemensamma bisektriser. Sök enveloppen för u, då U genomlöper l.* *X.*

Vi anta, att P och Q ligga på var sin sida om l. Är P_1 spegelbilden av P i l och Q_1 av Q i u, så äro trianglarna PQU och P_1Q_1U kongruenta enligt första kongruensfallet. Om PQ skär l i T och P_1Q_1 skär u i T_1, är $P_1T+QT=P_1T_1+QT_1$, dvs. enveloppen till u är en ellips (ev. en cirkel, om P och Q äro varandras spegelbilder i l) med foci i P_1 och Q, som tangerar l (och u). Ligga P och Q på samma sida, är enveloppen en hyperbel. För $P\equiv Q$ sammanfaller u med l.

H. Simonsson.

Även löst av *N. J.*, *B. Nordman*, *I. Gunsjö* och *Sb.*

1904) *Diskutera antalet reella rötter till ekvationen $x^3+1:x^3=a^3-3a$.* *X.*

Diskriminanten är (med x^3 som obekant) $(a^3-3a)^2-4\equiv$ $\equiv(a^3-3a+2)(a^3-3a-2)\equiv(a^2-4)(a+1)^2(a-1)^2$. För $a^2>4$ erhålles två reella rötter, som båda ha samma tecken som a, för $a=2$, -2 dubbelroten $x=1$, -1 resp., för $a=1$, -1 dubbelroten $x=-1$, 1 resp., för övriga a-värden erhållas inga reella rötter. *Sb.*

Införes $z=x+1:x$ hör det två x-värden till ett z-värde, som är numeriskt större än 2, medan $z=2$, -2 motsvaras av dubbelrötterna $x=1$ resp. -1; till övriga z-värden saknas reella x. Ekv. blir $z^3-3z=a^3-3a$ med $z_1=a$. Uppritas kurvan $y=z^3-3z$, för vilken tangenterna i max.- och min.-punkterna $(-1; 2)$, $(1; -2)$ skära kurvan i $(2; 2)$ resp. $(-2; -2)$, verifieras åskådligt ovanstående resultat.

X.

Även löst av *H. Simonsson*, *B. Nordman*, *I. Gunsjö* och *Sb.*

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen

Mars 1954

Matematiska uppgifter för latinlinjen [1]

1. I en konvergent oändlig geometrisk serie är produkten av den första och den tredje termen 1. Summan av den oändliga serie, som bildas av termerna med jämnt ordningsnummer, är 1,8. Ange seriens tre första termer.
2. I triangeln ABC är vinkeln A 22,83° och sidan AB dubbelt så stor som sidan BC. Hur stor är vinkeln B?
3. Ekvationssystemet $\begin{cases} 2x^2-ay^2=bxy \\ bx+y=a \end{cases}$

   satisfieras av $x=y=1$. Bestäm konstanterna a och b, och lös därefter ekvationssystemet fullständigt.
4. I kvadraten $ABCD$ är sidan 4 cm. Punkterna E, F, G och H ligger på sidorna AB, BC, CD respektive DA. Vidare är $AE=CG=x$ cm och $BF=DH=2x$ cm. Undersök, mellan vilka värden x kan variera. Uttryck därefter ytan av fyrhörningen $EFGH$ som funktion av x, och bestäm genom ett diagram eller på annat sätt det minsta värde, som denna yta kan anta.
5. Ett lån på 10 000 kronor upptogs i början av år 1950 mot 3 % årlig ränta på ränta. Vid slutet av varje år erlägges som ränta och amortering en annuitet av 500 kronor. Vid början av vilket år inträffar det första gången, att den återstående skulden understiger hälften av det ursprungliga lånebeloppet?
6. I triangeln ABC träffas sidan AB av höjden från C i punkten D och av mittpunktsnormalen till sidan AC i punkten E. Sidan AB delas därigenom i tre delar, AD, DE och EB, vilka var och en är 3 cm. Beräkna triangelns sidor och vinklar.
7. I triangeln ABC är AB 27 cm, BC 21 cm och CA 12 cm. Den i triangeln inskrivna cirkeln tangerar sidan AB i punkten E. Linjen CE skär cirkeln i D. Beräkna längden av CE och förhållandet mellan CD och DE.
8. Visa, att i en godtycklig rätvinklig triangel summan av kvadraterna på de tre sidornas medianer är 50 % större än kvadraten på hypotenusan.

[1] Uppg. i matematik för nyspråkligt lyceum utgjordes av latinlinjens nr 1, 3—8 och reallinjens (allm. kurs) nr 3.

Resultat: 1. $1\frac{1}{2}$, 1 och $\frac{2}{3}$ eller $-1\frac{1}{2}$, 1 och $-\frac{2}{3}$. 2. 28,07° eller 106,27°. 3. $a=1{,}5$, $b=0{,}5$; $x_1=y_1=1$; $x_2=-1{,}8$, $y_2=2{,}4$. 4. $0\leqq x\leqq 2$. Ytan $=Y=$ $=7+4(x-1{,}5)^2$; $y_{\text{min.}}=7$ cm^2. 5. Vid början av år 1969. 6. $AB=9$ cm, $BC=\sqrt{63}=7{,}937$ cm, $CA=6$ cm; $A=60°$, $B=40{,}89°$, $C=79{,}11°$. — Drag CE. 7. $CE=9$ cm; $CD:DE=1:8$.

Matematiska uppgifter för reallinjen

Allmän kurs.

1. En rektangel har ett hörn i origo, ett hörn i punkten $(-2;\ 6)$ och den ena diagonalen efter den räta linjen $x+7y-40=0$. Bestäm koordinaterna för de återstående hörnen.
2. En storhet y är en funktion av en annan storhet x, som kan anta alla värden fr. o. m. 10 t. o. m. 30. Sambandet mellan y och x uttryckes genom ekvationen $y=ax^2+bx^3$, där a och b är konstanter. För $x=12$ resp. 18 är motsvarande värden på $y=16$ resp. 27. Bestäm, för vilket värde på x värdet på y blir störst, och upprita motsvarande kurva inom variationsområdet.
3. Sidorna i en triangel förhåller sig som $5:6:9$. Den inskrivna cirkeln tangerar sidorna i punkterna A, B och C. Beräkna vinklarna i triangeln ABC.
4. Bevisa, att formeln $\left(1-\frac{2\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\right)^2=\left(1-\frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}\right)^2$ gäller för varje värde på x, som inte är av formen $k\cdot 90°$, där k är ett positivt eller negativt heltal eller 0.
5. I en cirkel med radien 1 dm drages en diameter. Dess ena ändpunkt tages till medelpunkt för en annan cirkel, som skär den förra cirkeln i punkterna A och B och diametern i C. Kordan AB drages. Cirkelsegmentet $ABCA$ får rotera kring den nämnda diametern, varvid ett sfäriskt segment uppstår. Bestäm radien i den sist uppritade cirkeln, när volymen av det sfäriska segmentet uppnår sitt största värde.
6. En regelbunden tresidig pyramid står med basytan ABC på ett horisontellt underlag. Lodrätt över hörnet A är punkten P så belägen, att avståndet PA är $1\,{}^1/_2$ gånger så stort som pyramidens höjd. Det genom P och kantlinjen BC lagda planet skär pyramiden i två delar. Beräkna förhållandet mellan delarnas volymer.
7. I ekvationen $x^3-x^2-x+k=0$ är k ett tal, som uppfyller villkoret $0<k<1$. Bevisa, att av ekvationens rötter en och endast en rot x_1 är sådan, att $0<x_1<1$.
8. En följd av trianglar T_1, T_2, T_3, ... T_n,... ligger så, att för varje heltalsvärde på $n\,(n\geqq 2)$ hörnen i triangeln T_n sammanfaller med tangeringspunkterna för den i triangeln T_{n-1} inskrivna cirkeln.

Hörnen i triangeln T_n betecknas med A_n, B_n och C_n, så att A_n ligger på $B_{n-1}C_{n-1}$ osv. Undersök, om gradtalet för vinkeln A_n i triangeln T_n går mot ett gränsvärde A för växande värden på n, dvs. om det finns ett tal A sådant, att skillnaden mellan A och A_n blir numeriskt godtyckligt litet, blott n väljes tillräckligt stort. Ange i så fall detta gränsvärde.

Resultat: **1.** (12; 4) och (10; 10). **2.** $y=\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{216}x^3$ växer från $12\frac{1}{27}$ för $x=10$ till max. 32 för $x=24$ och avtar därpå till 25 för $x=30$. **3.** 74,21°, 70,53°, 35,26°. **4.** Parenteserna förenklas till $-\mathrm{tg}^2x$, resp. $+\mathrm{tg}^2x$. **5.** $\sqrt{5}-1=1{,}236$ dm. — Klotens gemensamma volym består av två klotsegment, V i det variabla och V_1 i det fasta klotet. Den sökta radien $=x$, det senare segmentets höjd $=y$, $AB=2z$. Då är $\frac{d}{dx}(V+V_1)=$ $=$kalottytan $ABC=2\pi x(x-y)$; $\frac{dV_1}{dy}=\pi z^2=\pi(x^2-y^2)$; $2y=x^2$, $\frac{dy}{dx}=x$; $\therefore \frac{dV}{dx}=2\pi x(x-y)-\pi(x^2-y^2)\cdot x=0$; $\therefore 2=x+y=x+\frac{1}{2}x^2$ osv. **6.** I förh. 3:1 från basen räknat. — Lägges ett vertikalplan genom P och BC:s mittpkt (M), erhålles ur likformiga trianglar att PM delar sidokantlinjen genom A i förh. 3:1 från A räknat. **7.** Vänstra ledet är en kontinuerlig funktion $f(x)$; $f(-\infty)=-\infty$, $f(0)=k>0$, $f(1)=k-1<0$, $f(+\infty)=+\infty$. Ekv. har alltså *en* rot i vart och ett av intervallen $-\infty\to 0\to 1\to+\infty$. **8.** A_n går mot gränsvärdet 60°. — $A_n=90°-\frac{1}{2}A_{n-1}$, $A_n-60°=-\frac{1}{2}(A_{n-1}-60°)$, $A_n-60°=(-\frac{1}{2})^{n-1}(A_1-60°)\to 0$, då $n\to\infty$.

Matematiska uppgifter för reallinjen

Specialkurs

1. Tangenterna till en hyperbel i den ena parameterns ändpunkter skär en av asymptoterna i punkterna A och B. Visa, att sträckan AB:s projektion på konjugataxeln är lika lång som parametern.
2. Upprita kurvorna $y^2=4x$ och $x^2+y^2+2x=0$, och bestäm ekvationerna för deras gemensamma tangenter.
3. Visa, att funktionen $y=\frac{1-\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}\,x}$ satisfierar ekvationen $\frac{d^2y}{dx^2}+2y\frac{dy}{dx}=0$.
4. I fyrhörningen $ABCD$ är vinklarna A och B båda räta. Sidorna BC och CD har vardera längden 1 cm. Bestäm maximivärdet av fyrhörningens yta. Svaret skall anges i såväl exakt som approximativ form.
5. I en given klotsektor är medelpunktsvinkeln 120°. I sektorn inskrives en rät cirkulär cylinder, vars axel faller utefter sektorns symmetrilinje och vars buktiga yta är så stor som möjligt. Bestäm förhållandet mellan denna cylinders basradie och höjd.

6. En ellips, vars yta är π ytenheter, tangerar de positiva koordinataxlarna i ett rätvinkligt koordinatsystem. Genom punkten (0; 2) går två tangenter till ellipsen. En av dem sammanfaller med y-axeln. Den andra tangenten skär x-axeln i punkten P. Bestäm x-koordinaten för P som funktion av den av ellipsens halvaxlar, som är parallell med x-axeln, och åskådliggör denna funktion grafiskt med angivande av eventuella maximi- och minimipunkter samt asymptoter.
7. Upprita i dess huvuddrag kurvan $y=a:(x^2+1)$, där a är en konstant. En punkt P på kurvan är så belägen, att kurvans normal i denna punkt går genom origo. Sök och upprita geometriska orten för P, när a antar olika värden. Ange vidare, hur antalet normaler genom origo beror av a samt vilka spetsiga vinklar som dessa normaler kan bilda med y-axeln.

Resultat: **1.** Enkelt bevis. — Se även detta häfte, sid. 118. **2.** $x\pm y\sqrt{3}+3=0$ och $x=0$. — Om en av de gemensamma tangenterna skär x-axeln i A och y-axeln i B, M är cirkelns medelpkt och F parabelns fokus, så är $\sphericalangle ABF=90°$ och $\triangle BMF$ likbent, varav $\sphericalangle BAM=30°$. **3.** Man finner $y=\mathrm{tg}(\frac{1}{4}\pi-x)$, $y'=-1:\cos^2(\frac{1}{4}\pi-x)$, $y'+y^2=-1$, $y''+2yy'=0$. — Se även detta häfte sid. 119. **4.** $\frac{1}{4}\sqrt{9+\sqrt{108}}=1{,}101$ cm². Om x är den spetsiga vinkeln, blir ytan $\frac{1}{2}\sin x(2+\cos x)$ osv. — Den sökta ytan är $\frac{1}{4}$ av maximala ytan av en sexhörning med sidorna i ordning 1, 2, 1, 1, 2 och 1 cm, som inträffar, då sexhörningen är inskrivbar i en cirkel. Är diametern d, blir den mindre diagonalen $\sqrt{d^2-1}$. Enl. Ptolemaios' sats erhålles $2d+1\cdot 1=d^2-1$, osv. **5.** $\sqrt{3}:2$. — Om radien (=1) till cylinderns bottenperiferi bildar $x°$ med symmetriaxeln, blir ytan $2\pi\sin x(\cos x-\sin x:\sqrt{3})\equiv 2\pi\sin x\sin(60°-x):\sin 60°\equiv 2\pi[\cos(60°-2x)-\cos 60°]:\sqrt{3}$, osv. Se uppg. 6, specialmatem., mars 1953. **6.** $x_P=f(a)=(2a^2-a):(a-1)$, en hyperbel med asymptoterna $a=1$ och $x_P=2a+1$. Maximipkt $(1-1:\sqrt{2};\ 3-\sqrt{8})$, minimipkt $(1+1:\sqrt{2},\ 3+\sqrt{8})$; $a>0$. **7.** Orten är y-axeln och hyperbeln $x^2-2y^2=-1$. Då denna skär y-axeln i $(0;\pm 1:\sqrt{2})$, kunna tre normaler dragas, om $a^2>\frac{1}{2}$; en är y-axeln, de andra bilda med y-axeln vinklar mellan 0° och 57,73° ($\mathrm{tg}\,\alpha=\sqrt{2}$). Om $a^2\leqq\frac{1}{2}$, kan blott en normal dragas.

Uppgifter i fysik

1. Ett kraftverk, som normalt levererar 9000 kW, har ett reservaggregat, bestående av en dieselmotor och en därtill kopplad generator. Hur mycket olja återgår per timme för att med reservaggregatet täcka nämnda effektbehov? Oljans förbränningsvärme är 7200 kcal/kg. Anläggningens verkningsgrad kan uppskattas till 30 %.

2. Ett cylinderformat betongrör har den yttre diametern 6 dm och höjden 10 dm. Röret står på ett horisontellt golv. Man vill flytta det från en plats till en annan utan att först tippa det över ända och sedan rulla det. I den övre begränsningsytan anbringas därför en horisontell, radiellt riktad kraft. Vilken är den största friktionskoefficient mellan rör och golv, som kan råda, för att en flyttning på angivet sätt skall vara möjlig? Figur med krafter utritade erfordras.

3. Som första etapp i »rymdens erövring» har man tänkt sig att anlägga ett slags rymdstation utanför jordens atmosfär. Denna station skulle som en konstgjord måne gå runt jorden. På vilket avstånd från jordytan måste rymdstationen röra sig, om dess omloppstid kring jorden skall vara precis 2 timmar? Jorden antages sfärisk med radien 6370 km, och rymdstationen förutsättes röra sig i en cirkulär bana kring jorden. Man får bortse från rymdstationens utsträckning i rummet.

4. En lärjunge, som ville studera olika linsers egenskaper, sammanställde två mycket tunna, lika beskaffade urglas på sådant sätt, att deras konvexa ytor berörde varandra i mitten, och monterade dem så, att mellanrummet blev lufttätt. Han erhöll härigenom en bikonkav s. k. luftlins. Därefter sänkte han ned linsen i ett med vatten fyllt, rektangulärt glaskärl och belyste den från ena sidan med en knippe ljusstrålar, som voro parallella sinsemellan och med linsens horisontella optiska huvudaxel. Med hjälp av en i kärlet flyttbar mattglasskiva fann han, att på andra sidan linsen ljusknippet konvergerade mot en viss punkt på axeln för att sedan divergera. Denna punkts avstånd från linsen uppmättes till 24 cm. Han kunde härav beräkna urglasens krökningsradie. Vilket värde erhöll han? Vattnets brytningsexponent är 1,33. Figur med enkel strålgång erfordras.

5. På en optisk bänk är uppställda en belyst skala, en tunn samlingslins och en liten skärm i nu angiven ordning. Skalan och skärmen är vinkelräta mot linsens optiska huvudaxel. På skärmen erhålles en skarp bild av skalan. Mellan linsen och skärmen placeras därefter en konvex spegel med den konvexa ytan vänd mot linsen och med den optiska huvudaxeln sammanfallande med linsens. Då avståndet mellan spegeln och skärmen är 34 cm, erhålles efter brytning i linsen, reflexion i spegeln och återigen brytning i linsen en bild av skalan, som faller på själva skalan. Beräkna spegelns brännvidd. Figur med strålgång erfordras. Föremålet kan därvid betraktas som punktformigt och liggande på den optiska huvudaxeln.

6. Ett motstånd AC med resistansen 100 ohm är anslutet till en väggkontakt för 220 V likström. Mellan A och en punkt B på motståndet, så belägen, att resistansen hos motståndsdelen AB är 50 ohm, kopplas en elektrisk försöksapparat. Om denna drar 2,0 A, hur många kW uttages därvid från väggkontakten? Kopplingsschema med strömpilar erfordras.
7. Man ville bestämma resistansen hos två voltmetrar, då de var inställda för mätområdena 0—10 V. De anslöts först i serie med varandra och med en propppreostat till ett ackumulatorbatteri. Då reostatmotståndet var 0, visade voltmetrarna 8,0 resp. 4,0 V. Därefter gjordes den ändringen i försöksanordningen, att voltmetrarna kopplades parallellt. Bägge visade därvid 7,5 V, då reostatens resistans var 400 ohm. Beräkna härav resistansen hos var och en av voltmetrarna. Man kan bortse från batteriets liksom tilledningstrådarnas resistans. Kopplingsschema erfordras.
8. Med vilken medelhastighet i fältets riktning rör sig ledningselektronerna i koppar, om de utsättes för ett elektriskt fält med styrkan 1 volt per meter. En koppartråd av 1 m längd och 1 cm² genomskärningsyta har resistansen $17 \cdot 10^{-5}$ ohm. 1 coulomb är $6{,}25 \cdot 10^{18}$ elementarladdningar. 1 cm³ koppar innehåller $8{,}25 \cdot 10^{22}$ atomer. Man kan utgå från att det går en ledningselektron på varje atom.

Resultat: **1.** 3600 kg. **2.** Friktionskoeff. skall vara mindre än 0,3. **3.** 1690 km. **4.** 11,9 cm. **5.** −17 cm. **6.** 0,704 kW. **7.** 2000 och 1000 ohm. **8.** 0,43 cm/sek.

Realexamen v. t. 1954

Provräkning

1. Lös ekvationen $\dfrac{1}{0{,}6x+2} - \dfrac{1-0{,}1x}{0{,}09x^2-1} - \dfrac{0{,}5}{0{,}9x-3} = 0$
2. I en rektangel $ABCD$ är sidan AB 4 cm och sidan BC 2 cm. På sidan AB är en punkt E så belägen, att AE är 1 cm. Från E drages parallellt med diagonalen AC en linje, som skär sidan BC i punkten F. Beräkna längden av sträckan EF.
3. En person, som i arv erhållit 50 000 kr, köpte till 85 % kurs 20 st 4 % obligationer å nominellt 1000 kr per st och till 90 kr kurs 300 st aktier, som lydde på 75 kr per st och årligen gav 5 kr i utdelning per aktie. Resten av pengarna satte han in i en bank, som gav 2,5 % ränta. Hur många procent årlig ränta fick han därigenom i genomsnitt på sitt ärvda kapital?
4. I triangeln ABC förhåller sig vinkeln A till vinkeln B som 4:3 och vinkeln A till vinkeln C som 2:1. Om den kring triangeln omskrivna cirkelns medelpunkt kallas O, hur stor är vinkeln OBA?

5. En handlande köpte 100 ton potatis till ett pris av 19 öre per kg. Inköpskostnaderna utgjorde 1000 kr. Vid bestämning av försäljningspriset beräknade han 50 % pålägg. Sedan han sålt $\frac{4}{5}$ av partiet, måste 20 % av återstoden kasseras, men resten såldes. Försäljningskostnaderna utgjorde 4000 kr. Beräkna vinsten i procent av samtliga utgifter.
6. En bilist och en cyklist startade samtidigt från en ort *A* och åkte samma väg mot en annan ort *B*. Efter 5 minuter fick bilisten punktering och stannade för att byta ring. Sedan han hållit på med detta arbete i 15 minuter, passerades han av cyklisten. Efter ytterligare 10 minuter kunde bilisten starta igen. Han körde hela återstoden av vägen med en hastighet, som i medeltal var 10 km/tim högre än den han först hållit, och anlände till *B* 56 minuter före cyklisten. Denne, som hela tiden åkt med jämn hastighet utan att göra något uppehåll, använde 1 tim 44 min på hela vägen från *A* till *B*. Hur lång var denna väg?
7. I en rätvinklig triangel *ABC* är hypotenusan *BC* 12 cm. Från dennas mittpunkt *D* drages normalen *DE* mot hypotenusan. Punkten *E* ligger på kateten *AC*. Beräkna ytan av triangeln *ABC*, om sträckan *DE* är 2 cm.
8. En regelbunden pyramid med kvadratisk basyta är inskriven i en rät cirkulär kon med generatrisen 25 cm och höjden 15 cm, så att hörnen av pyramidens basyta ligger på periferien av konens bottenyta och pyramidens topp sammanfaller med konens spets. Hur stor är skillnaden mellan konens och pyramidens totala begränsningsytor $\pi = 3{,}14$.

Resultat: **1.** $8\frac{1}{3}$. **2.** $1{,}5\sqrt{5} = 3{,}35$ cm. **3.** 4,9 %. **4.** 50°. **5.** 20 %. **6.** 29 km. **7.** 21,6 cm². **8.** 860 cm².

Provräkning i realexamen (avkortad kurs)

omfattade ovanstående uppg. 1, 3, 5, 6 (här med ordningsnumren 1, 5, 7, 8) samt följande fyra uppgifter.

2. Hur många procents årlig ränta erhåller en person på sina pengar, om han för 4400 kr inköpt $5\frac{1}{2}$ % obligationer efter 110 % kurs?
3. En person, som skulle betala en kostym hos sin skräddare, erbjöds av denne att välja mellan två olika betalningssätt. Antingen kunde han betala kostymen kontant, varvid skräddaren skulle ge honom 5 % kassarabatt, eller också kunde han lämna skräddaren en 3 månaders växel lydande på kostymens pris utan rabatt. Växeln kunde omedelbart diskonteras i en bank efter 6 %. Kunden valde det förra sättet, varigenom skräddaren erhöll 15 kr 40 öre mindre, än han skulle fått i senare fallet. Vilket var kostymens pris utan rabatt?

4. Vid en viss tidpunkt hade staden S 1000 invånare mer än staden T. Sedan dess har folkmängden ökat med 10 % i S och med 12 % i T, och den senare staden har nu 1000 invånare mer än den förra. Beräkna invånarantalet i respektive städer vid det förra tillfället.
6. Väggarna i en sal, som är 10 m lång, 6,4 m bred och 4,4 m hög och i vilken fönster och dörrar upptar en yta av 19,2 m², skall tapetseras. Hur många rullar tapeter åtgår härtill, om varje rulle är 0,5 m bred och 8 m lång, då vid tapetens tillklippning 8 % bortklippes utan att komma till användning? Vad kostar tapetseringen, om man använder tapeter till 12 kr per rulle och arbetslöner m. m. uppgår till 260 kr?

Resultat: **2.** 5 %. **3.** 440 kr. **4.** 106 000 och 105 000 resp. **6.** 34 st.; 668 kr.

Praktisk realexamen v. t. 1954

Uppgifter i fysik för maskinteknisk linje

1. En kub av mässingsplåt har kantlängden 40 mm. Mitt på den övre sidoytan är fastlött ett 40 mm långt mässingsrör med yttre diametern 20 mm, så att rörets axel är vinkelrät mot kubens sidoyta. Apparaten, som väger 68,71 g, flyter stabilt i vatten med röret lodrätt. Beräkna längden av den del av mässingsröret, som befinner sig över vattenytan. $\pi = 3{,}14$. Enkel figur erfordras.
2. En vagn, som väger 800 kg, drages längs en horisontell väg. Friktionsmotståndet utgör 2,5 % av vagnens tyngd. Hur stor dragkraft behöves för att ge vagnen en acceleration av 0,5 m/sek²? Tyngdkraftens acceleration är 9,8 m/sek².
3. Urverket till en fabriksklocka drives genom tyngden av en metallcylinder, vars vikt är 25 kg. Vikten sänker sig 15 mm i minuten. Var 40:e minut sättes automatiskt en liten elektrisk motor i gång, som hissar upp vikten till utgångsläget på 5 sekunder. Vilken är motorns mekaniska effekt, om man antar, att 70 % därav kommer lyftarbetet tillgodo?
4. I en enkel luftpump utgöres den rörliga delen av en kolv, som föres fram och tillbaka i en metallcylinder (pumpstövel). Pumpen är försedd med erforderliga ventiler. Allteftersom trycket i den behållare, varur luften pumpas ut, minskar, blir det tyngre att draga ut kolven. Hur stor kraft erfordras härför, bortsett från friktionen, då trycket i behållaren nedgått till 150 mm Hg? Kolvens genomskärningsyta är 6,5 cm² och kvicksilvers täthet 13,6 g/cm³. Barometerståndet är 750 mm Hg.
5. Genom att insätta halvgenomskinliga värmeisolerande plattor mellan dubbelfönstren i en lagerlokal kan man enligt gjorda mät-

ningar nedbringa värmeförlusten genom varje kvadratmeter av fönstren med i genomsnitt 27 kcal per timme. Härigenom inbesparar man per eldningssäsong en kvantitet koks, som kan beräknas därav, att eldningssäsongen antages utgöra 4000 timmar, 1 kg koks har ett effektivt bränslevärde av 4500 kcal, och 1 hl koks väger 40 kg. Hur många procent av plattkostnaden, som inberäknat montering utgör 9,90 kr per kvadratmeter, är besparingen av bränsle under en säsong? Koksen kostar 6,60 kr/hl.

6. En glödlampa i en projektionsapparat är stämplad: 125 V, 750 W. Då man önskar använda den i en lokal, där nätspänningen är 220 V, förser man den med ett lagom avpassat förkopplingsmotstånd. Hur stor effekt drar detta? Kopplingsschema erfordras.
7. Man ville bestämma motståndet hos en voltmeter. Denna anslöts därför i serie med en reostat till ett ackumulatorbatteri med konstant polspänning. Voltmetern visade 4,0 V, då reostatmotståndet var 2000 ohm, 8,0 V däremot, då reostatmotståndet var 500 ohm. Beräkna härav voltmeterns motstånd. Kopplingsschema erfordras.
8. I en våning avlästes energiförbrukningen på en mätare, på vilken stod angivet, att den gjorde 10 000 varv per kWh. Nätspänningen var 220 V. För att få reda på strömstyrkan vid full belastning i de ledningar, som förband anläggningen med nätet, tändes alla lampor, varvid mätaren gjorde 100 varv på 1 min 12 sek. Hur stor var strömstyrkan i huvudledningen?

Resultat: **1.** 25 mm. **2.** 60,8 kp. **3.** 0,057 hk. **4.** 5,3 kp. **5.** 40 %. **6.** 570 W. **7.** 1000 ohm. **8.** 2,27 A.

Uppgifter i fysik för kemisk-teknisk linje

Uppg. 1, 4—8 i provet för maskinteknisk linje jämte följande uppgifter.

4. Man placerar en liten belyst millimeterskala S_1 25 cm framför en tunn samlingslins. På en annan millimeterskala S_2, som är parallell med S_1, uppfångas en skarp bild av S_1. Man observerar, att en skaldel på bilden täcker 4 mm på skalan S_2. Hur långt från skalan S_1 skall linsen skjutas för att man på skalan S_2 skall erhålla en skarp bild, där 4 skaldelar täcker 1 mm?
5. Vid förnickling med $NiSO_4$ som elektrolyt ville man använda en strömtäthet av 0,5 A per dm^2 katodyta. Hur lång tid gick därvid åt för att överdraga ett föremål med ett 0,04 mm tjockt nickellager? Nickel har atomvikten 58,7 och tätheten 8,8 g/cm^3. För utfällning av gramekvivalenten åtgår 96 500 coulomb. Man räknar med att den erhållna utfällningen är 90 % av den teoretiskt beräknade.

Resultat: **4.** Så att avståndet från S_1 blir 100 cm. **5.** 7 tim 9 min.

Kemi med laboratorieteknik för kemisk-teknisk linje

1. Angiv tre olika egenskaper hos de båda modifikationerna av fosfor.
2. Angiv kemiska formler och användning av a) superfosfat b) vattenglas c) svavelkis d) kalciumhydroxid.
3. Angiv fem organiska föreningar och deras kemiska formler, där i varje förening ingår två kolatomer.
4. En vattenlösning av ett prov innehåller följande joner: Hg^{2+}, Mn^{2+}, Zn^{2+}, H_4N^{1+} och Cl^{1-}. Redogör för hur man kvalitativt påvisar dessa joner.
5. Redogör för framställning av lysgas. Angiv de väsentliga beståndsdelarna i lysgas.
6. Angiv fullständiga reaktionsformler, då följande ämnen reagerar med varandra:
   a) järn + utspädd svavelsyra →
   b) koppar + utspädd salpetersyra →
   samt koefficienterna i följande reaktionsformler:
   a) $KMnO_4 + HCl \rightarrow MnCl_2 + KCl + H_2O + Cl_2$
   b) $SnCl_2 + KBrO_3 + HCl \rightarrow SnCl_4 + KBr + H_2O$
7. För framställning av järn användes svartmalm (Fe_3O_4). Malmen innehåller 15 % föroreningar. Hur många ton järn kan teoretiskt erhållas ur 10,0 ton svartmalm?
8. 20,0 ml av en viss jodlösning förbrukar vid titrering 21,46 ml 0,1 N natriumtiosulfatlösning. Hur många ml vatten skall sättas till 850 ml av jodlösningen för att erhålla en lösning, som är 0,1 N med avseende på jod?
9. 2,0 g av en blandning av kopparpulver och zinkpulver behandlas med utspädd saltsyra, som bör förefinnas i överskott. Den vid reaktionen utvecklade gasen intar vid 0° C och 760 mm Hg en volym av 0,56 liter. Beräkna hur många procent koppar och zink pulverblandningen innehöll.
10. 3,0 g orent kaliumkarbonat löses i vatten. Lösningen utspädes till 300 ml. 30,0 ml av denna lösning förbrukar vid titrering 20,0 ml 0,2 N svavelsyra. Beräkna hur många procent rent K_2CO_3 det orena kaliumkarbonatet innehöll. Föroreningarna i kaliumkarbonatet förbrukar inte svavelsyra vid titreringen.

Atomvikter: C = 12,0, Cu = 63,6, Fe = 55,8, J = 126,9, K = 39,1, Na = 23,0, S = 32,0, Zn = 65,4, Cl = 35,5. N = normalitet.

Resultat: **6.** a) $2\,KMnO_4 + 16\,HCl \rightarrow 2\,MnCl_2 + 2\,KCl + 8\,H_2O + 5\,Cl_2$, b) $3\,SnCl_2 + KBrO_3 + 6\,HCl \rightarrow 3\,SnCl_4 + KBr + 3\,H_2O$. **7.** 6,15 ton. **8.** 62,1 ml. **9.** 81,75 % zink. **10.** 92,1 %.

Beskrivande maskin- och byggnadslära för maskin-teknisk linje

1. Vid provtryckning av en ståltub med 6 mm godstjocklek och 250 mm inre diameter uppstod brott vid ett övertryck av 340 kp/cm². Beräkna materialets brottgräns.
2. Vid ett tunnelbygge skall taket stöttas med träpelare, som har 12,5 cm diameter. Lasten på varje pelare är 5000 kp och säkerheten mot knäckning skall vara minst 5-faldig. Elasticitetsmodulen kan sättas till 100 000 kp/cm². Beräkna den största längd, som pelarna får ha.
3. I en ångpanna alstras ånga med trycket 14 atö. Matarvattnets temperatur höjes i en ekonomiser från 60° till 110°. I överhettaren inkommer torr mättad ånga, vars temperatur här höjes till 350°. För vatten kan spec. värmet sättas=1 kcal per kg och grad, för överhettad ånga under dessa förhållanden till 0,548 kcal per kg och grad. Beräkna de till vattnet och ångan förda värmemängderna i ekonomiser, ångpanna och överhettare i kcal per kg ånga.
4. Ett 6 volts bilbatteri kan under 2 timmar avge en ström av 40 ampère. Bilmotorn drives med bensin, vars värmevärde är 10 500 kcal/kg och täthet är 0,72 kg/liter. Motorns verkningsgrad är 24 %. Hur många liter bensin erfordras för att i nyttigt arbete ge samma energimängd som batteriet?
5. En 4-cylindrisk fyrtakts förgasarmotor arbetar med ett medeltryck av 7,1 kp/cm² vid varvtal mellan 2500 och 4500 r/min. Cylinderdiametern är 75 mm och slaglängden 80 mm. Rita en kurva, som visar hur effekten varierar med varvtalet inom de ovannämnda gränserna. Avläs effekten vid 3600 r/min.
6. En axel med 200 mm diameter roterar med 80 r/min och överför ett vridmoment av 1790 kpm. Axeln uppbäres av två glidlager, vilka vart och ett bär en last av 2200 kp. Friktionskoefficienten i lagren kan antagas till 0,01. Hur stor är effektförlusten i lagren, uttryckt i procent av den överförda effekten?
7. En 3 m hög betongmur uppbär en last av 45 Mp per längdmeter. Beräkna murbredden upptill för en tillåten påkänning av 10 kp/cm². Muren vilar på hård pinnmo, som tål en tryckspänning av 5 kp/cm². Beräkna med ledning härav murens bredd nedtill, då hänsyn även tages till murens egen vikt. Betongens täthet sättes till 2,5 kg/dm³. Murens tvärsnitt utgör ett parallelltrapets.
8. Rita en skiss av en tvåtakts förgasarmotor med vevhuskompression. Markera på denna förgasarens placering. Redogör för, hur gasens tryck varierar under motorns gång.

Resultat: **1.** 7080 kp/cm². **2.** 2,17 m. **3.** Resp. 50, 554 och 84 kcal/kg. **4.** 0,23 l. **5.** 40,2 hk. **6.** 0,25 %. **7.** Resp. 45 cm och 101 cm.

illustrationer. Den kan därför näppeligen sättas i händerna på en gymnasist, men kemiläraren bör kunna finna en hel del intresseväckande partier i den. *Birger Adell*

Paul Pascal, *Notions élémentaires de chimie générale à lumière des théories modernes.* Masson et Cie, Paris 1953, 550 p., fr. 3600.

Professor Pascal har förut givit ut monografien Chimie générale i fyra delar (anmälda i Elementa 1949—1952). Den nya boken, »notions élémentaires», vänder sig till en större läsekrets än specialister i fysikalisk kemi.

På ca 100 sidor får man följa utvecklingen av föreställningarna om materien alltifrån de antika filosoferna över klassisk atomteori och analys av linjespektra fram till atomkemi. Därefter kommer den i mitt tycke bästa delen av boken, en skickligt gjord exposé över kemisk bindning och strukturlära. Några planscher med vackra och instruktiva bilder, som tagits bl. a. med elektronmikroskop, öka värdet av denna avdelning. Den kemiska kinetiken och jämviktsläran liksom lösningar och dispersa system behandlas grundligt och överskådligt i bokens sista del. Den matematiska behandlingen av lagarna har begränsats till det allra enklaste, men naturligtvis är boken inte fördenskull »populär».

En gedigen, innehållsrik, intressant bok! *Bertil Englund*

J. A. A. Ketelaar, *Chemical Constitution.* Elsevier Publishing Co. Amsterdam and London 1953, Pp. 398, 40s.

Professorn i fysikalisk kemi i Amsterdam ger här en introduktion till teorien för kemisk bindning, enl. förf. det centrala i hela den moderna kemien. Sedan grunden lagts upp med vågmekanikens hjälp, behandlas jonbindning och atombindning i var sin huvuddel av boken. Alla matematiska utredningar äro samlade i särskilda finstilta stycken på sådant sätt, att den läsare, som accepterar resultaten, inte behöver besväras av deduktionerna.

De nya synpunkterna komma ofta i konflikt med klassiska skolmässiga åsikter. Författaren är medveten om de svårigheter som t. ex. definitionen av ett salt innebär — han stannar för att låta den kemiska känslan få utslagsröst: »regarded in this way salts are built up of ions». För syror och baser finner han Brönsteds terminologi bättre än Lewis'. I sammanhang med detta nämns en sak av intresse för undervisningen: det existerar ett hydrat av ammoniak, men ingen »ammoniumhydroxid» — de basiska egenskaperna hos lösningen bäras av baserna H_3N och OH^-. Vätebindningen ägnas som sig bör uppmärksamhet också i anslutning till andra strukturproblem.

Bertil Englund

IOLOGI

ALSKOLAN

MMARSTEN - PEHRSON - SEFVE

logi för realskolan utarbetad av *Kurt k, Olof Hammarsten, Torsten Pehrson, Ivar e* och *Sal. Torgård.*
ogi I för femåriga realskolan. G Inb 8:25
ogi I för fyraåriga realskolan. G Inb 7:75
ogi II för femåriga och fyraåriga realskolan. G Inb 6:—

en och människokroppen jämte hälso- (även för fyraåriga gymnasiets första) utarbetad av *Olof Hammarsten, Torsten son* och *Ivar Sefve.* G Pbd 4:80

viderad upplaga med hänsynstagande till de kursplanerna utkommer till höstterminen.

nniskokroppen och dess vård (även för åriga gymnasiets första ring) utarbetad av *Gedda, Olof Hammarsten, Torsten Pehrson Ivar Sefve.* G Inb 5:60

SELL - SKÅRMAN

obok i botanik för realskolan. G Inb 5:60

RMAN

rs i botanik. För realskolans avslutnings-s. Supplement till *Forsell - Skårman.* G Hft 1:30

IOLM - LEYON

ppen och hälsan. Lärobok för praktiska anskolor och flickskolor samt för real-or och gymnasiets första ring. G Hft 3:60

nniskan, ärftlighet, utveckling. Biologi enhetsskolans och den treåriga realskolans avslutningsklass. Utkommer till höstterminens början.

ALMQUIST - LAGERSTEDT

Lärobok i naturkunnighet I.
Avd. 1. Läran om växterna (Botanik). Under medverkan av *Carl Cederblad,* bearb. av *Gust. O. A:n Malme.* G Inb 4:75
Avd. 2. Läran om djuren (Zoologi). Bearb. av *L. G. Andersson.* G Inb 5:20

GYMNASIET

FOLKE BORG

Biologi för det differentierade gymnasiet.
I. Jämförande anatomi. G Pbd 4:95
II. Ärftlighetslära och utvecklingslära. G Hft 1:30
III. Fysiologi G Hft 2:75
Serien omarbetas i anslutning till de nya kursplanerna. Sålunda utkommer till höstterminen 1954 *andra ringens kurs,* utarb. av *Sven Österlind.*

HAMMARSTEN - PEHRSON - SEFVE

Utvecklings- och ärftlighetslära. G Pbd 2:05

Växternas inre byggnad och livsföreteelser. G Hft 1:90

Zoologi för det differentierade gymnasiet. G Pbd 3:50

Kryptogamer jämte en kort översikt över växtrikets utveckling. G Hft 2:15

Fysiologi för det differentierade gymnasiet. G Hft 1:75

FALCK - HAMMARSTEN - LINNELL - PEHRSON

Biologi för gymnasiet. Första delen omfattande andra ringens kurs utkommer till höstterminens början.

SVENSKA BOKFÖRLAGET

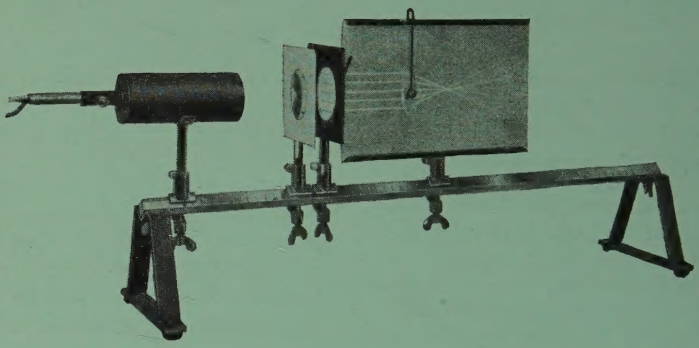
KOLBOKCENTRALEN
David Bagares gata 20 · Stockholm
Tel. 23 69 80 · Postgiro 551 60

Utställning
Lärarexemplar
Rekvisitioner

Utställning även Parkgatan 19, Göteborg

Hamngatan 4, Malmö

Norstedts experimentsats för optik



Optisk skiva byggd med delar
ur experimentsatsen

Pris inkl. förvaringslåda av trä
kronor 285:—

P. A. NORSTEDT & SÖNER

Skolavdelningen - Box 898 - Stockholm 1

Lund 1954, Håkan Ohlssons Boktryckeri